МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 8 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 5 – 6. Повторение. Случайные события. Вероятности и частоты. Классические модели – монета и игральная кость

Документ содержит задачи для вводного повторения материала по теории вероятностей за 7 класс. Учитель может на свое усмотрение использовать материалы целиком или частично наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Материал для повторения

Теория вероятностей рассматривает случайные события не сами по себе, а в рамках *случайных опытов (случайных экспериментов)*. Случайный опыт — это условия и обстоятельства, в рамках которых мы рассматриваем случайные события.

Вероятность случайного события — это числовая мера правдоподобия этого события.

Невозможное случайное событие — это случайное событие, которое в случайном эксперименте не наступает. Вероятность невозможного события равна 0.

Достоверное случайное событие — это случайное событие, которое в случайном эксперименте обязательно наступает. Вероятность достоверного события равна 1. Вероятности остальных событий — это числа от 0 до 1. Чем больше шансов у события, тем выше его вероятность.

Достоверное и невозможное события тоже считаются случайными событиями, несмотря на то, что их вероятности точно известны.

Предположим, что в некотором опыте рассматривается случайное событие A, и такой опыт можно повторять много раз, при этом каждый раз независимо от предыдущих. Отношение числа опытов, в которых событие A произошло, к общему числу проведённых опытов, называется *частотой* данного случайного события в этой серии опытов.

Вероятности и частоты связаны. Если опыт повторить достаточно много раз, то частота события будет близка к его вероятности.

[1] Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

Если вероятность события мала, то такое событие наступает редко и его частота будет мала. Такие события называют *маловероятными*. Если же наоборот, вероятность близка к единице, то такое событие наступает практически всегда, его частота будет велика. Такое событие называют *практически достоверным*.

Обычно люди следуют правилу: в однократном опыте маловероятное событие не происходит.

Монета в теории вероятностей — инструмент, с помощью которого можно получать два равновозможных исхода (вероятность выпадения каждой стороны равна $\frac{1}{2}$). Игральный кубик позволяет получить шесть равновозможных исходов (вероятность выпадения каждой стороны равна $\frac{1}{6}$). Эти объекты — математические модели без размера, цвета, веса. На опытах с монетами и кубиками легко и удобно учиться теории вероятностей, также с их помощью можно моделировать довольно сложные и важные эксперименты.

Не существует единого и универсального способа определить вероятности событий.

- ✓ Иногда вероятности элементарных событий назначают из соображений симметрии (пример: вероятности орла и решки при бросании монеты).
- ✓ Иногда вероятности можно оценить (найти приближенно) с помощью многократных экспериментов (пример: вероятность поломки телевизора определенной модели в течение гарантийного срока).
- ✓ Иногда вероятности элементарных событий удается вычислить, исходя из известных вероятностей других событий (например, можно найти, что при бросании двух монет вероятность выпадения двух орлов равна 0,25, зная, что при бросании одной монеты вероятность орла равна 0,5).
- ✓ Иногда вероятности событий не удается ни назначить, ни оценить, ни вычислить никаким способом. Такие события в рамках теории вероятностей не рассматриваются (пример: вероятность того, что в 2050 году будет найдена новая форма жизни).

Задачи

1. Вообразите, что вы отправились на рыбалку на озеро, где водится только окунь и плотва. Какие случайные события могут произойти при этом?

2. Игральный кубик бросают один раз. Приведите примеры каких-нибудь четырёх случайных событий в этом случайном эксперименте.

3. Падение сосульки с крыши на голову пешехода — событие маловероятное. Что нужно делать для того, чтобы эту вероятность ещё уменьшить?

4. Приведите примеры маловероятных событий в эксперименте «прогноз погоды на завтра в Москве».

5. Книгу, в которой 256 страниц, открывают на случайно выбранной странице. Какие события являются достоверными, а какие — невозможными.

а) номер открытой страницы — дробное число;
б) номер открытой страницы равен 342.
в) номер открытой страницы в книге не меньше 1;

6. Вы идете из дома в школу. Расположите случайные события по возрастанию их вероятностей:

$A = \{\text{по дороге вы встретите более трёх кошек}\}$;

$B = \{\text{по дороге вы встретите хотя бы одну кошку}\}$;

$C = \{\text{по дороге вы встретите более одной кошки}\}$;

$D = \{\text{по дороге вы встретите более ста кошек}\}$.

7. Как вы думаете, можно ли экспериментально оценить вероятность следующих событий:

а) вас спросят на уроке;
б) на уроке в классе присутствуют все ученики;
в) вы не сделаете в изложении ни одной ошибки;
г) любимая мамина ваза разобьется в результате падения на пол.

8. Можно ли приближенно вычислить вероятность опоздания ученика на урок? Если можно, что для этого нужно сделать?

9. Бросают игральный кубик, на гранях которого числа от 1 до 6. Укажите, какие из перечисленных событий являются достоверными, а какие — невозможными:

а) выпадет 7 очков;
б) выпадет больше 2, но меньше 5 очков;
в) выпадет от одного до шести очков;

г) выпадет больше 3, но меньше 4 очков.

10. Пусть каждый ученик в вашем классе бросит игральную кость шесть раз. Выпали хотя бы у кого-нибудь шесть «шестёрок»? Можно ли считать такое событие маловероятным?

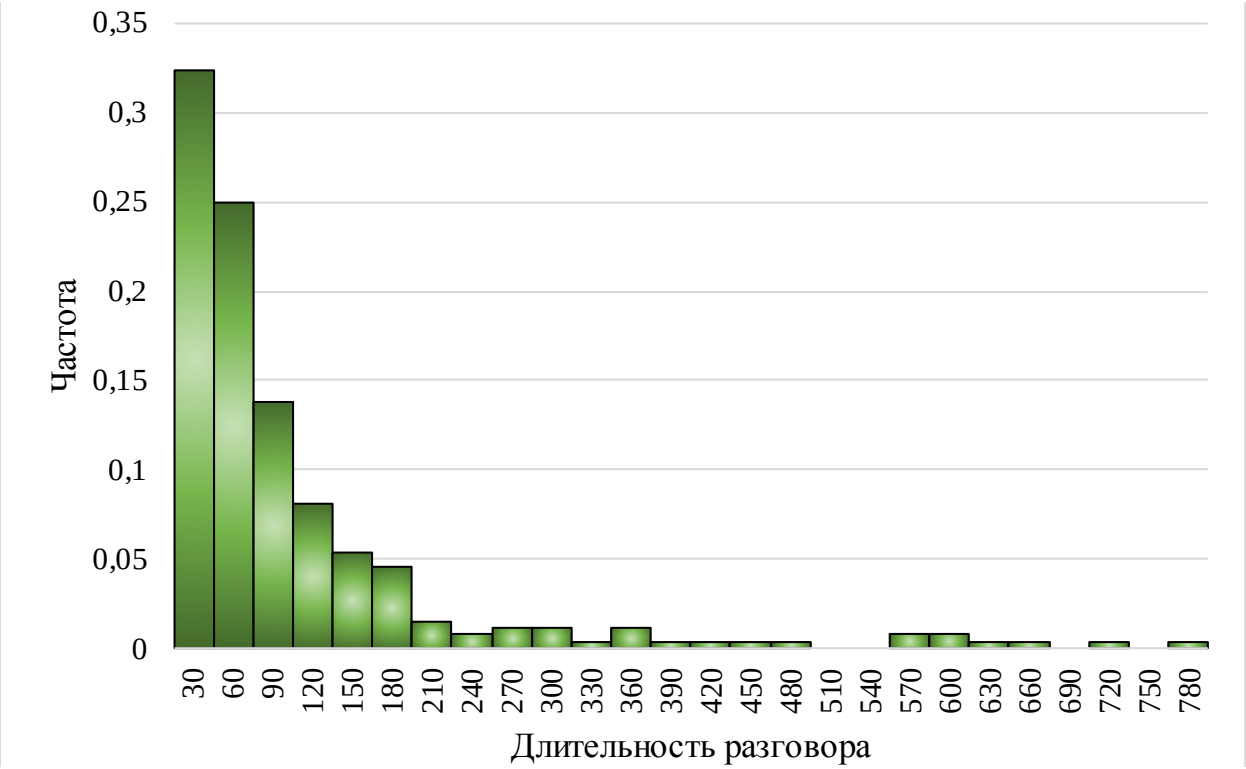
11. Для правильной монеты мы полагаем, что вероятность выпадения орла равна 0,5. Разумно ли ожидать, что при 100 бросаниях монеты орёл выпадет:

а) 5 раз; б) 49 раз; в) 90 раз.

12. В тесте по биологии 16 задач с выбором ответа из четырёх предложенных вариантов. Верный вариант только один. Тройку ставят за 4 правильных ответа, четверку — за 12, а пятерку — за 15 правильных ответов. Вася не готов к тесту и выбирает ответы наудачу. Разумно ли ожидать, что Вася получит:

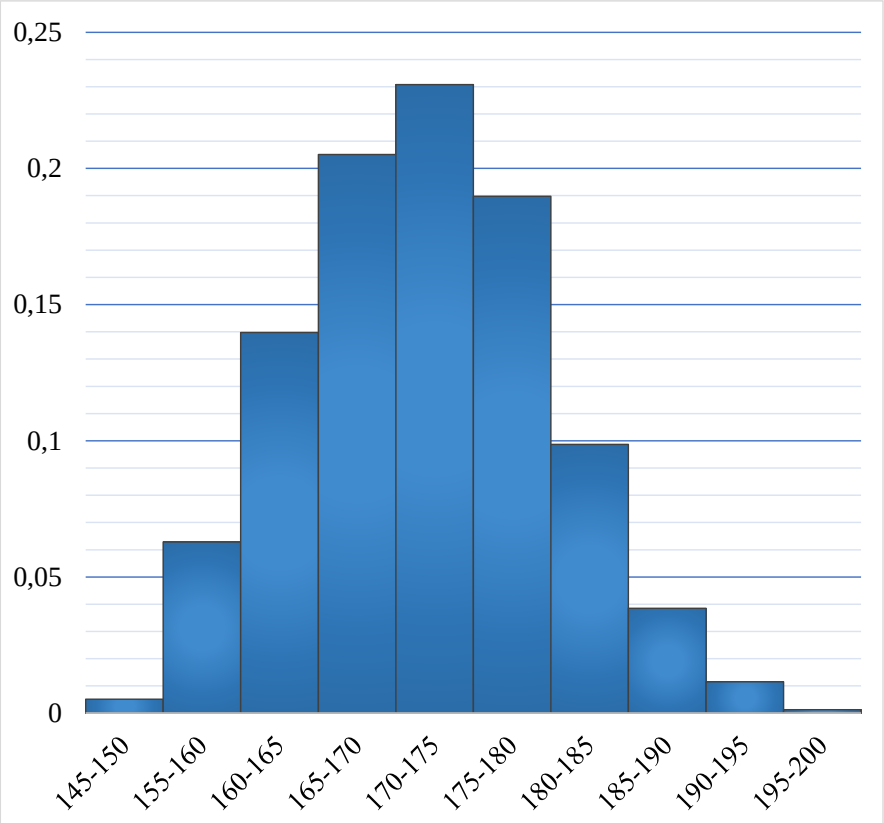
а) отметку 3; б) отметку 4; в) отметку 5?

13. По данным о длительности телефонных разговоров Николая в течение недели построена гистограмма (шаг группировки 30 секунд).



Найдите приближённо частоту события «разговор Николая длится не более минуты».

14. По результатам медицинского осмотра учащихся школ района построена гистограмма распределения роста учеников 11 класса.



а) Определите приблизительно средний рост одиннадцатиклассника в этом районе города.

б) Найдите приближенно по гистограмме частоту события «одиннадцатиклассник имеет рост 180 см или выше».

Ответы и решения задач

1. Примеры элементарных событий: «ни одной рыбы так и не выловили», «поймали только окуней», «поймали только плотву», «поймали только одну рыбу», «выловили более 10 рыб», «выловили рыб разных видов». Пример невозможного события (исходя из постановки задачи) — «выловили щуку».

2. Примеры элементарных событий: «выпала шестерка»; «выпало от 1 до 6 очков» (достоверное событие); «выпало 7 очков» (невозможное событие); «выпало число очков, кратное числу 3».

3. Сосульки образуются зимой или в начале весны на карнизах и крышах домов. Поэтому нужно быть внимательным: не ходить под карнизами и не заходить в опасные зоны.

4. Для конца сентября в Москве маловероятными событиями будут, например, события «температура воздуха 32 градуса Цельсия» или «метель».

5. а) и б) — невозможные, в) — достоверное.

6. D, A, C, B .

7. Для оценки вероятности того, спросят ли вас на уроке, присутствуют ли все ученики на уроке или напишете вы ли изложение без ошибок, можно собрать статистику и оценить частоту этих событий. А вот с любимой маминой вазой это не получится — вы не сможете повторить эксперимент с её падением много раз.

8. Сначала надо уточнить условия эксперимента: мы изучаем какого-то конкретного ученика и его опоздания, или вообще наличие опоздавшего ученика в некотором выбранном классе. Если мы хотим найти вероятность опоздания, например, конкретного ученика, необходимо вести учёт его опозданий на протяжении какого-то времени (недели, месяца). Потом найти частоту опозданий как отношение количества опозданий к общему количеству уроков за этот период. Чем больше наблюдений, тем, скорее всего, более точной будет оценка вероятности.

9. а), г) — невозможное, в) — достоверное.

10. Вероятность указанного события приблизительно равна 0,00002. Но и не вычисляя эту вероятность, мы понимаем, что это событие можно считать маловероятным. Вряд ли такое случилось с кем-нибудь в вашем классе. Если такое произошло, это поистине удивительно, и такого счастливчика следует поздравить.

11. 49 раз — вполне вероятный результат. Остальные варианты маловероятны, хотя теоретически такое возможно.

12. Не умея вычислять вероятности, мы все же понимаем, что угадать 4 раза из 16 при указанных условиях и получить тройку возможно. Угадать 12 раз уже практически невозможно. Поэтому ожидать, что Вася получит 4 или 5, не очень разумно.

13. Нужно сложить высоты столбиков 0 – 30 и 30 – 60. Получается приблизительно 0,575.

14. б) Нужно сложить высоты столбиков 180 – 185, 185 – 190 и 190 – 195. Получается приблизительно 0,15.