МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 8 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 16. Случайный выбор. Продолжение

Примерный сценарий урока по теме «Случайный выбор. Продолжение». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты наряду с собственными разработками и материалами из учебной литературы. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Используемая литература

1. Математика 7 – 9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — 3-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. — 256 с.: ил.;

2. Дидактические материалы по теории вероятностей. 8 – 9 классы / И. Р. Высоцкий. — М.:МЦНМО, 2018, 224 с.

Оборудование: калькулятор.

Цель урока — развить навыки расчёта вероятности случайного события в опытах, связанных со случайным выбором.

Повторение (устно)

1. В группе туристов 6 человек. С помощью жребия они выбирают двоих, кто пойдет в село за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

2. На фестивале КВН выступают команды — по одной от каждого из представленных городов. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что команда из Самары будет выступать после команды из Саратова, но раньше команды из Новосибирска?

3. Хоккейная команда «Шайба» по очереди проводит три товарищеских матча с командами «Гайка», «Болт» и «Эксцентрик». В начале каждого матча судья вбрасывает шайбу между клюшками капитанов играющих команд. Будем считать, что вероятность выиграть при вбрасывании у капитанов всех четырёх команд одинаковая. Какова вероятность того, что капитан команды «Шайба» выиграет ровно два вбрасывания из трёх?

Новый материал

На прошлом уроке разбирались задачи, связанные с выбором наудачу. Если этот выбор осуществляется без каких-либо предпочтений, то можно говорить о равновозможности элементарных событий. На этом уроке будут рассмотрены более сложные задачи, связанные со случайным выбором. Несколько следующих примеров в большой степени похожи друг на друга. В них нужно выяснить про двух человек из класса или про пару элементов из множества, попадут ли они в одно подмножество, или нет. Решаются такие задачи способом, который можно условно назвать «выбор пары», и суть которого станет ясна из дальнейшего изложения. Начните с простого примера.

Комментарий. Все задачи так или иначе сводятся к описанию эксперимента с равновозможными элементарными исходами. В ходе решения задач целесообразно начинать постепенно отказываться от подробной записи

$$N = \ldots,\ N(A) = \ldots, \mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \ldots,$$

оставляя эту запись лишь при разборе задач на доске. Полный отказ от такой записи следует отложить до тех пор, пока опыты с равновозможными исходами не станут появляться как составная часть более сложных экспериментов, где внимание учащихся должно быть сосредоточено на описании этих сложных экспериментов, а не на составлении отношений.

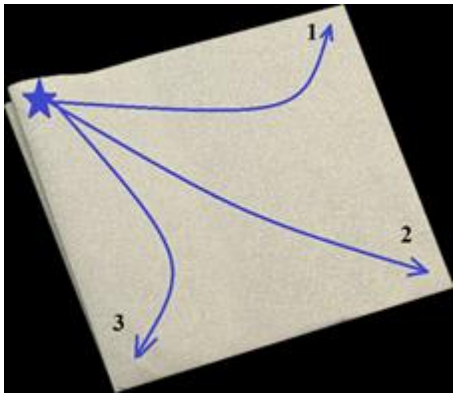
В процессе решения задач итоговый ответ рекомендуется переводить в десятичную дробь (если нужно — при помощи калькулятора). Десятичные дроби удобнее сравнивать с единицей. Например, вероятность $\mathrm{P} = \frac{18}{89}$ — точный ответ, но учащиеся лучше поймут, насколько она велика или мала, если взять $\mathrm{P} \approx 0,202$. О точности вычисления стоит договариваться заранее в зависимости от задачи, но обычно вероятности вычисляются с точностью до тысячных.

Пример 1. В турнире по аэрохоккею среди 17 участников 7 россиян, в том числе Иван Иванов. Соперники в каждом туре определяются жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что в первом туре Иван Иванов сразится с соотечественником.

Желательный результат обсуждения. Элементарным исходом эксперимента является пара для Ивана Иванова. В пару к нему может с равными шансами попасть любой участник турнира, кроме самого Ивана. Таким образом, элементарных исходов в эксперименте $17-1=16$. А благоприятствующих событию A «в первом туре Иван Иванов сразится с соотечественником» исходов $7-1=6$, поскольку кроме Ивана в турнире участвуют еще шесть россиян. Поэтому, искомая вероятность равна $\frac{6}{16} = 0,375$.

Обратите внимание учеников на то, что не важно, о каком туре спрашивается в задаче, и не важно, сколько туров в турнире.

Пример 2. Одно время на улицах и вокзалах профессиональные игроки предлагали прохожим испытать удачу в простой игре. Зажав в кулаке обычный носовой платок так, что наружу высовывались только четыре уголка, игрок просил прохожего взять два любые конца и потянуть за них. Если прохожий вытаскивал два соседних угла, то он проигрывал. Если прохожий вытаскивал два противоположных угла, то он выигрывал. Найдите вероятность выигрыша прохожего и вероятность выигрыша игрока.



Желательный результат обсуждения.
Конечно, в этом эксперименте шесть элементарных событий (четыре стороны платка и две диагонали). Но представим себе, что прохожий вытаскивает два уголка по очереди. В силу симметрии не важно, какой уголок выбран первым. Тогда случайный опыт сводится к выбору второго уголка — одного из трёх. Значит, можно изменить описание эксперимента и считать, что в нём всего три равновозможных элементарных исхода. Из них один благоприятствует выигрышу прохожего (уголок 2 на рисунке) и два — выигрышу игрока (уголки 1 и 3 на рисунке). Поэтому, вероятности событий «выиграет прохожий» и «выиграет игрок» равны 1/3 и 2/3 соответственно. Следовательно, шансы больше у игрока, чем у прохожего.

Комментарий: В задаче про платок можно рассмотреть модель эксперимента, в которой шесть элементарных исходов (об этом говорилось выше). Можно пронумеровать углы платка и рассмотреть все возможные пары (тогда элементарных исходов будет 12). Важно, чтобы ученики поняли, что решать задачу можно, описывая элементарные события разными способами. Мастерство состоит в умении выбрать простую модель.

Пример 3. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их делят на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами: четыре карточки с номером 1, четыре — с номером 2, четыре — с номером 3 и четыре карточки с номером 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Известно, что команда Бразилии оказалась в группе № 3. Какова вероятность того, что команда России окажется в той же группе?

Желательный результат обсуждения. Элементарный исход в этом эксперименте — карточка, которую вытянул капитан российской команды. Известно, что Бразилии досталась одна из карточек с номером 3. Поэтому осталось $N = 16 - 1 = 15$ карточек. Из них три карточки благоприятствуют событию A

«команда России попадёт в группу № 3»: $N(A)=3$. Все исходы равновозможны. Поэтому

$$\mathrm{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{3}{15}=0,2.$$

Пример 4. В классе 26 человек, среди них два друга — Сергей и Павел. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Павел окажутся в одной группе.

Желательный результат обсуждения. Если считать, что элементарный исход — выбор двух мест для Сергея и Павла, то задача получается со сложным множеством элементарных исходов. Как и в примере 2 с платком, здесь не важно в какую группу попадет первый мальчик (обсудите, почему). Упростим описание эксперимента: представим, что Павел уже попал в какую-то группу, и найдем вероятность того, что Сергей попадет в ту же группу.

Пронумеруем мысленно места в группах: в первой группе места с 1 до 13, а во второй — с 14 по 26. Павлу уже достался какой-то номер. Осталось выбрать номер только для Сергея. Таким образом, элементарный исход в этом эксперименте — выбор номера, который достанется Сергею. В группе, где Павел, осталось 12 свободных номеров из 25. Поэтому $N=25$, а событию «Сергей оказался в той же группе, что и Павел» благоприятствуют $N(A)=12$ из них. Все исходы равновозможны. Поэтому

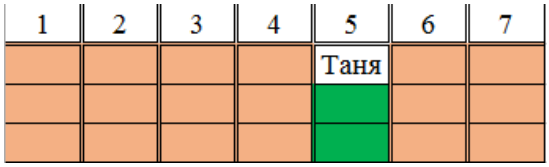
$$\mathrm{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{12}{25}=0,48.$$

Комментарий. Обратите внимание учеников: если бы группы были разной численности, то такой способ решения задачи был бы невозможен. Обсудите причину: если группы разной численности, то вероятности попадания Павла в первую и вторую группу разные. Поэтому нельзя сказать, что не важно, в какую группу попал Павел. Такие задачи мы научимся решать позже.

Пример 5. В межминистерском турнире по бадминтону участвуют 26 чиновников разных ведомств, в том числе 7 министров, а один из них — министр просвещения. В первом туре соперники определяются жеребьевкой. Найдите вероятность того, что министр просвещения в первом туре не будет играть ни с одним из других министров.

Желательный результат обсуждения. Поступим как в предыдущей задаче: «зафиксируем» министра просвещения и будем подбирать ему пару. Элементарным событием является игрок, попавший в пару к министру просвещения. Событию «пара — не министр» благоприятствует $26-7=19$ элементарных исходов из общего их числа 25 (сам с собой министр играть не сможет). Таким образом, получаем ответ: $\frac{19}{25}$, т.е. 0,76.

Пример 6. Для составления графика дежурств класс разбили на 7 групп по 3 человека в каждой. Найдите вероятность того, что учащиеся в этом классе Таня и Даня попадут в одну группу.



Желательный результат обсуждения. Пусть Таня записана в какую-то группу (см. рис.). Будем выбирать группу для Дани и посмотрим, какие у него есть возможности попасть в группу к Тане.

Для благоприятного исхода остается два места в той же группе, что и Таня (на рисунке эти места отмечены зеленым), а всего равновозможных вариантов для Дани 20. Поэтому искомая вероятность равна 0,1.

Пример 7. Случайно выбрали 2 различных двузначных числа. Найдите вероятность того, что они дают одинаковый остаток при делении на 5.

Желательный результат обсуждения. Эта задача аналогична предыдущим. Действительно: двузначных чисел всего 90 (от 10 до 99). 18 из них при делении на 5 дают остаток 0, еще 18 дают остаток 1, и так далее. Получается 5 групп по 18 чисел. Пусть первое из выбранных чисел попало в какую-то группу. Тогда подберем ему пару: годится 17 из оставшихся 89 чисел. Искомая вероятность равна $\frac{17}{89}$, т.е. приблизительно 0,191.

Пример 8. В кармане у Маши 6 монет: все по 1 рублю, кроме двух монет достоинством 2 рубля. На ощупь монеты она отличить не может. Маша не глядя достает из кармана 3 монеты. Найдите вероятность того, что Маша достала только одну из двухрублёвых монет.

Желательный результат обсуждения. Удобно считать, что двухрублёвые монеты как-то отличаются друг от друга. Например, одна из них этого года выпуска, а другая прошлого. Тогда задача становится очень похожа на задачу про Сергея и Павла, которые должны попасть в одну группу. Одна группа монет — те, что остались в кармане, а другая — те, что Маша вытащила (каждая группа по три монеты). Рассмотрим группу, куда уже попала более новая двухрублёвая монета, и найдем вероятность того, что более старая попадет в другую группу. Искомая вероятность равна $\frac{3}{6-1}=0,6$.

Пример 9. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки окажутся за столом рядом.

Желательный результат обсуждения. Вместо выбора двух мест для двух девочек, будем считать, что первая девочка уже села на какой-то стул. Задача сводится к простому выбору места для второй девочки. Всего свободных мест осталось 8, а рядом с первой девочкой 2 места. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{2}{8}=0,25$.

Пример 10. В круг, взявшись за руки, в случайном порядке встали 14 детей, среди них Оля и Серёжа. Найдите вероятность того, что они не стоят рядом.

Желательный результат обсуждения. Можно сначала найти вероятность того, что Оля и Серёжа стоят рядом, аналогично предыдущим примерам. Нас же интересует вероятность противоположного события, а вероятности противоположных событий в сумме дают 1.

Ответ: приблизительно 0,846.

Выводы и итоги урока. При решении задач на случайный выбор подразумевается, что этот выбор осуществляется без каких-либо предпочтений. Поэтому можно говорить о равновозможности элементарных событий. При решении более сложных задач важно выбрать хорошую модель эксперимента, с понятным и не очень большим множеством элементарных событий. Вычисления стоит производить в десятичных дробях, в том числе при помощи калькулятора.

Рекомендуемое домашнее задание: см. Приложение.

Приложение

Домашнее задание

1. Перед первым уроком английского языка класс из 32 человек разбили на две одинаковые по численности группы. Найдите вероятность того, что подружки Лена и Лера окажутся в одной группе.

2. В группе 51 человек, среди них Алексей и Пётр. Группу разбивают случайным образом на 3 равные по численности подгруппы. Найдите вероятность того, что Алексей и Пётр попадут в одну группу.

3. В турнире по шашкам участвует 56 шашистов, в том числе 12 россиян, одного из которых зовут Борис. В каждом туре соперники определяются жребием. Найдите вероятность того, что в пятом туре Борис играет с соотечественником.

4. За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.

5. Выбрали два случайных различных двузначных числа. Какова вероятность того, что их сумма окажется чётной?

6*. Из натуральных чисел от 1 до 1000 случайным образом выбирают два различных числа. Найдите вероятность того, что оба эти числа окажутся не больше 500.