

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 8 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 14. Опыты с равновозможными элементарными событиями

Примерный сценарий урока по теме «Опыты с равновозможными элементарными событиями». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

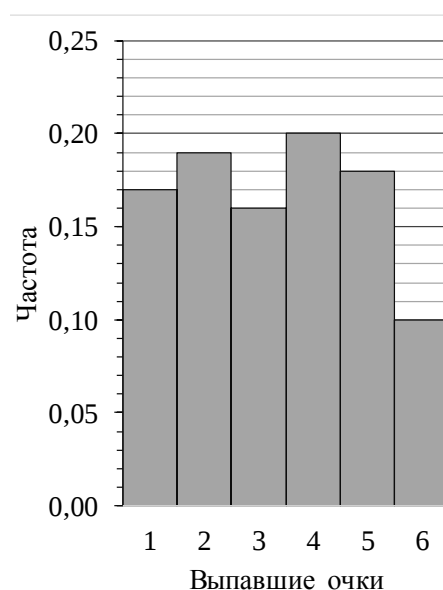
Используемая литература:

1. Математика 7 – 9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко. — 3-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. — 256 с.: ил.;
2. Дидактические материалы по теории вероятностей. 8 – 9 классы / И. Р. Высоцкий. — М.: МЦНМО, 2018, 224 с.

Цель урока — развить навыки расчёта вероятности случайного события в опытах, где все элементарные события равновозможны.

Повторение (устно).

1. Сформулируйте правило вычисления вероятностей.
2. Бросают одну игральную кость. Событие A заключается том, что выпало не больше, чем шесть очков. Является ли событие A достоверным? Чему равна вероятность события A ?
3. Приведите пример достоверного события в случайном эксперименте с бросанием двух игральных костей.
4. Если в случайном опыте N равновозможных элементарных событий, то чему равна вероятность каждого?
5. Изучая статистику, семиклассник провёл эксперимент: он 100 раз подбросил правильный игральный кубик и записал, сколько очков выпало при каждом броске. Результаты показаны на гистограмме. Найдите частоту события «Выпало не более двух очков»



Новый материал

Опыты с равновозможными элементарными событиями в жизни почти не встречаются. Практические все такие опыты искусственные. Это игры — лотереи, жребии и т.п. Теория вероятностей произошла от подсчёта шансов в играх, но она давно вышла за рамки игровых экспериментов. Однако классические вероятностные модели — монета и игральные кубики (кости), жребии и подобное — остаются важным учебным элементом и частью научной культуры. Во-первых, потому что в этих экспериментах заранее известны вероятности элементарных исходов. Но главное, потому что эти эксперименты, несмотря на простоту, позволяют моделировать гораздо более важные и сложные случайные опыты и процессы.

Элементарные события называются равновозможными, если все они имеют одинаковые шансы на осуществление. Следовательно, эти элементарные события имеют равные вероятности.

Если в случайном опыте N равновозможных элементарных событий, то вероятность каждого равна $\frac{1}{N}$. Это обстоятельство позволяет легко находить вероятности событий в таком опыте.

Обозначим $N(A)$ число элементарных событий, благоприятствующих событию A . Вероятность события A равна сумме вероятностей благоприятствующих ему элементарных событий:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{N(A) \text{ слагаемых}} = \frac{N(A)}{N}$$

Таким образом, можно сформулировать правило¹.

Правило. В опыте с равновозможными элементарными событиями вероятность события A равна отношению числа элементарных событий, благоприятствующих событию A , к общему числу элементарных событий.

Пример 1. Симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность события A «орёл выпадет только один раз».

Желательный результат обсуждения. В этом опыте 16 элементарных событий, все они равновозможны. Из них событию A благоприятствуют четыре: ОРРР, РОРР, РРОР, РРРО. Воспользуемся формулой для вычисления вероятности события:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

¹ Часто это правило называют «классическим определением вероятности». Это не совсем верно. Такой способ подсчёта является не определением, а следствием из того, что вероятность события равна сумме вероятностей благоприятствующих ему элементарных событий даже тогда, когда они не равновозможны.

Пример 2. Игральную кость бросают два раза. Найдём вероятность события B «произведение выпавших очков делится на 6».

Желательный результат обсуждения. В этом опыте 36 равновозможных элементарных событий. Выделим в таблице этого опыта элементарные события, благоприятствующие событию B . Их 15. Тогда

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Предложите ученикам следующие задачи.

Пример 3. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события:

- а) A «орлы и решки чередовались»;
- б) B «решка выпала ровно два раза».

Ответ: а) 0,25; б) 0,375.

Пример 4. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

- а) K «выпавшие очки отличаются меньше чем на 2»;
- б) L «выпавшие очки отличаются больше чем на 3».

Ответ: а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{1}{6}$.

Пример 5. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков равна 8. Найдите вероятность события A «в первый раз выпало не больше, чем 5».

Желательный результат обсуждения. Обратите внимание учащихся: в данном эксперименте возможных элементарных событий не 36, а 5 (в таблице эксперимента они закрашены). Из них событию A благоприятствуют четыре (отмечены в таблице крестиком).

Значит, $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{5} = 0,8$.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Пример 6. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков меньше шести. Найдите вероятность события:

- а) «в первый раз выпало 2 очка»;
- б) «сумма выпавших очков равна 5».

Ответ: а) 0,3; б) 0,4.

Пример 7. По правилам игры «Морской бой» на поле 10×10 клеток размещаются четыре однопалубных корабля (по одной клетке), три двухпалубных, два трехпалубных и один четырёхпалубный. Игрок делает первый случайный выстрел. Найдите вероятность того, что он:

- а) попадёт в однопалубный корабль противника;
- б) попадёт в трёхпалубный корабль;
- в) попадёт в какой-нибудь из кораблей противника.
- г) не попадёт ни в какой корабль.

	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Желательный результат обсуждения. На поле 100 клеток, поэтому в эксперименте 100 элементарных событий. Будем считать их равновозможными, поскольку по условию первый выстрел случаен².

а) Четыре однопалубных корабля занимают 4 клетки, поэтому попаданию в однопалубный корабль благоприятствуют 4 элементарных исхода. Искомая вероятность равна $\frac{4}{100} = 0,04$.

б) Трёхпалубных корабля два, но на них приходится в сумме 6 клеток. Искомая вероятность равна $\frac{6}{100} = 0,06$.

в) Всего на корабли приходится $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 20$ клеток. Искомая вероятность равна $\frac{20}{100} = 0,2$.

г) Событие «не попадёт ни в какой корабль» есть отрицание события из пункта в). Поэтому искомая вероятность равна $1 - 0,2 = 0,8$.

² На самом деле вряд ли игрок делает случайные выстрелы. Как правило, игроки придерживаются своих излюбленных стратегий, стараются учесть психологию противника, оптимальную расстановку кораблей и даже опыт предыдущих партий. Но раз в условии сказано, что выстрел случайный, у нас нет оснований не считать элементарные события равновозможными.

Пример 8. На рисунке показано положение в конце партии в «Морской бой». Красным цветом показаны потопленные корабли противника. У него остался лишь двухпалубный корабль, положение которого неизвестно. Точки показывают поля, по которым мы уже стреляли. В них не может быть корабля. Считая равновероятными любые допустимые положения последнего корабля, найдите вероятность того, что мы попадём в него, если выстрелим в поле:

	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
1	•	•	•	•	•	■	•			
2	•	■	•	•	•	•	•	•	•	
3	•	■	•	■	•	■	■	■	•	•
4	•	■	•	•	•	•	•	•	•	
5	•	■	•	■	■	■	•	•	•	•
6	•	•	•	•	•	•	•	•	■	•
7	•	■	•	•	•		•	•	■	•
8	•	•	•	•				•	•	•
9	•	■	■	•	•		•	•	•	•
10	•	•	•	•		•	•	•	■	•

- а) к4; б) з1; в) к1; г) е7; д) е8.

В какое поле нужно выстрелить, чтобы вероятность подбить последний корабль была наибольшей?

Решение.

а) При выстреле в к4 вероятность попасть в двухпалубный корабль равна нулю, так как клетка изолирована.

Чтобы дать ответы на вопросы б) – д), нужно найти общее количество элементарных событий эксперимента, то есть число возможных расположений двухпалубного корабля. Их всего семь: (з1,и1), (и1,к1), (к1,к2), (е7,е8), (е8,е9), (е8,ж8), (д8,е8).

б) Событию «корабль поражён выстрелом з1» благоприятствует лишь один элементарный исход (з1,и1). Вероятность попадания равна $\frac{1}{7}$.

в) Событию «корабль поражён выстрелом к1» благоприятствуют два элементарных исхода: (и1,к1) и (к1,к2). Вероятность этого события равна $\frac{2}{7}$.

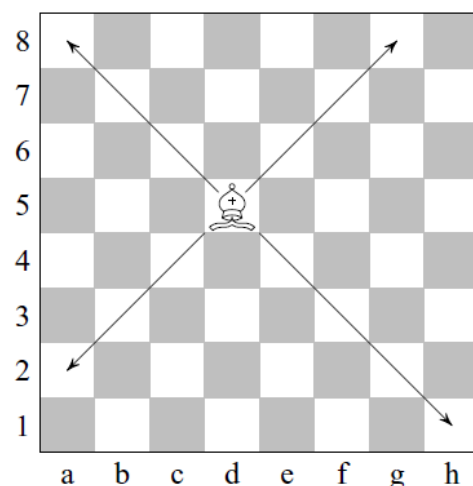
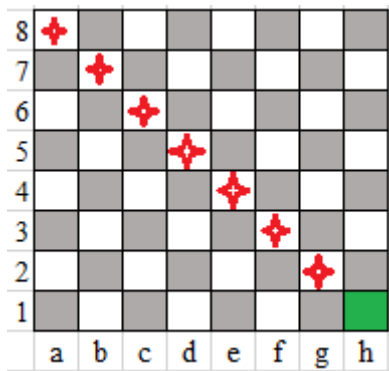
г) и д) Рассуждая аналогично, находим, что вероятности равна $\frac{1}{7}$ и $\frac{4}{7}$ соответственно.

Желательное обсуждение. Если бы в условии спрашивалась вероятность поразить корабль случайным выстрелом, то элементарными исходами были бы пустые поля. Но по условию случайным является не выстрел, а положение последнего корабля.

Пример 9. Шахматный слон может за один ход перейти на любое число полей, двигаясь только по диагонали (см. рисунок).

На случайное поле шахматной доски поставили слона. Найдите вероятность того, что он может за один ход перейти на поле:

а) h1; б) a5; в) c4; г) d7; д) d5.



Желательный результат обсуждения. Элементарным событием является случайное положение слона на поле. Значит, элементарных событий 64. Слон может из своего положения одним ходом попасть в поле h1 только если он может одним ходом

перейти из h1 обратно на это поле. Удобно сделать рисунок, где изображены все поля, которые бьёт слон, стоящий на поле h1 (см. рис.). Этих полей 7. Значит, ответ 7/64.

Ответ: а) $\frac{7}{64}$; б) $\frac{7}{64}$; в) $\frac{11}{64}$; г) $\frac{9}{64}$; д) $\frac{13}{64}$

Выводы и итоги урока. При решении задач очень важно чётко определить (иногда проговорить вслух или записать), как выглядят элементарные исходы в случайном опыте. Иногда они очевидны сразу, а иногда — нет, как в примере 8. Определив элементарные события, нужно задать себе вопрос — являются ли они равновозможными. Если из условия или из жизненного опыта ясно, что никакое элементарное событие не имеет больше шансов, чем любое другое, то да, в этом опыте элементарные события равновозможны.

Рекомендуемое домашнее задание: см. Приложение.

Приложение

Домашнее задание

1. Бросают симметричную монету два раза. Одинаковы ли вероятности событий A «два раза выпал орел» и B «при одном броске выпал орел, а при другом — решка»?
2. Бросают две игральных кости: желтую и зеленую. Вычислите вероятность события:
 - а) «сумма очков на обеих костях равна 7»;
 - б) «сумма очков на обеих костях больше 8, и на зеленой кости выпало больше двух очков»;
 - в) «на желтой кости выпало больше очков, чем на зеленой»;
3. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что произведение выпавших очков чётно. Найдите вероятность события:
 - а) «при одном из бросков выпало 5 очков»;
 - б) «в сумме выпало больше 2, но меньше 7 очков»;
4. При игре в «Морской бой» после первого вашего выстрела противник сообщил, что вы подбили какой-то корабль (но не потопили его). Какова вероятность того, что вы попали:
 - а) в четырёхпалубный корабль;
 - б) в трёхпалубный;
 - в) в двухпалубный?
5. В городе N пять улиц. Две из них идут параллельно друг другу с севера на юг, а остальные проходят параллельно друг другу с запада на восток. Любые две улицы разных направлений пересекаются. Утром два постовых случайным образом встали на два разных перекрестка. Найдите вероятность того, что они стоят на одной улице.