МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 8 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 13. Вероятности событий

Примерный сценарий урока по теме «Вероятности событий». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Используемая литература:

1. Математика 7 – 9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — 3-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. — 256 с.: ил.;

2. Дидактические материалы по теории вероятностей. 8 – 9 классы / И. Р. Высоцкий. — М.:МЦНМО, 2018, 224 с.

Цель урока — научить школьников искать вероятность случайного события как сумму вероятностей благоприятствующих элементарных событий.

Повторение (устно). Обсудите с учащимися следующие вопросы.

1. Что означает высказывание «элементарное событие благоприятствует событию *A*»? Сформулируйте эту мысль иначе.

2. Всякое ли элементарное событие в опыте является случайным событием?

3. Верно ли, что случайному событию может благоприятствовать только одно элементарное событие?

4. Могут ли в опыте два случайных события наступить одновременно?

5. Могут ли в опыте два элементарных события наступить одновременно?

6. В таблице указаны значения и частоты некоторого числового набора. Укажите недостающую частоту, отмеченную вопросительным знаком.

Таблица. Значения и частоты

Значения	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Частоты	0,3	0,2	?	0,3	0,1

Новый материал

На прошлом уроке речь шла о том, что случайные события состоят из благоприятствующих им элементарных событий. Напомните ученикам, что вероятность события обычно обозначается буквой P латинского алфавита. Например, вероятность события A обозначим $\mathrm{P}(A)$, вероятность события B — это $\mathrm{P}(B)$, и т. п.

Правило вычисления вероятностей. Вероятность события равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

Запишем это правило формулой. Пусть событию A благоприятствуют n элементарных событий $a_1, a_2, ..., a_n$: то есть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей этих элементарных событий:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(a_1) + \mathrm{P}(a_2) + ... + \mathrm{P}(a_n).$$

Комментарий. В зависимости от подготовленности класса эту формулу можно дать в общем виде или для события, в котором три-четыре элементарных события.

Вероятности всех элементарных событий неотрицательны и в сумме равны единице. Поэтому вероятность любого события A также неотрицательна и не превосходит 1:

$$0 \le \mathrm{P}(A) \le 1.$$

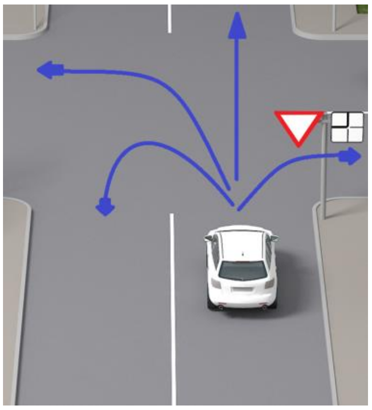
Число элементарных событий, благоприятствующих данному событию, и, следовательно, число слагаемых в правой части равенства может быть сколь угодно большим и даже бесконечным.

Если событие невозможно, тогда ему не благоприятствует ни одно элементарное событие. Следовательно, в правой части ни одного слагаемого нет, и его вероятность равна нулю. Достоверному же событию благоприятствуют все элементарные события эксперимента, поэтому в правой части будет сумма вероятностей всех возможных элементарных событий. А она, как известно, равна единице.

Пример 1. В шахматной партии, которую Остап Бендер играет с любителем шахмат города Васюки, вероятность выигрыша Остапа равна 0,001, вероятность ничьей равна 0,01. Найти вероятность события A «Остап не проиграл».

Желательный результат обсуждения. Событию A благоприятствуют элементарные события «Остап выиграл» и «партия окончилась вничью». Таким образом, $\mathrm{P}(A) = 0{,}001 + 0{,}01 = 0{,}011$.

Пример 2. Автомобиль приближается к перекрестку. Предположим, что вероятность элементарного события «автомобиль повернёт направо» равна 0,18, вероятность элементарного события «автомобиль повернёт налево» равна 0,3, вероятность элементарного события «автомобиль поедет прямо» равна 0,5. Найти вероятность события A «автомобиль не развернётся».



Желательный результат обсуждения. Событию A благоприятствуют все три перечисленных элементарных события. Следовательно,

$$P(A) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}98.$$

Предложите учащимся найти вероятность события B «автомобиль развернется». Обсуждение должно привести к тому, что $P(A)+P(B)=1$. Это равенство верно в силу того, что A и B в совокупности содержат все возможные элементарные события эксперимента.

Пример 3. В шахматной партии Андрей играет с Борисом. Вероятность выигрыша Андрея равна 0,3, вероятность ничьей равна 0,2, вероятность того, что партия не будет закончена, равна 0,01. Найдите вероятность того, что:
а) Андрей не проиграет; б) никто не выиграет; в) Борис не проиграет.

Желательный результат обсуждения. а) Андрей не проиграет в одном из трёх случаев: если он выиграет, если будет ничья или если партия не будет окончена. Поэтому искомая вероятность равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}3+0{,}2+0{,}01=0{,}51$.

б) Никто не выиграет в том случае, если партия не будет закончена или будет ничья, поэтому искомая вероятность равна $0{,}2+0{,}01=0{,}21$.

в) Борис проигрывает только в случае выигрыша Андрея (вероятность этого события равна 0,3), а значит не проиграет во всех остальных случаях. Поэтому искомая вероятность равна $1-0{,}3=0{,}7$. Обсудите с учащимися обобщение этого факта: *сумма вероятностей события и его отрицания равна единице*. В хорошо подготовленном классе можно предложить доказать это утверждение, разбив элементарные события на две группы.

Пример 4. Стрелок один раз стреляет в круглую мишень (см. рис.)

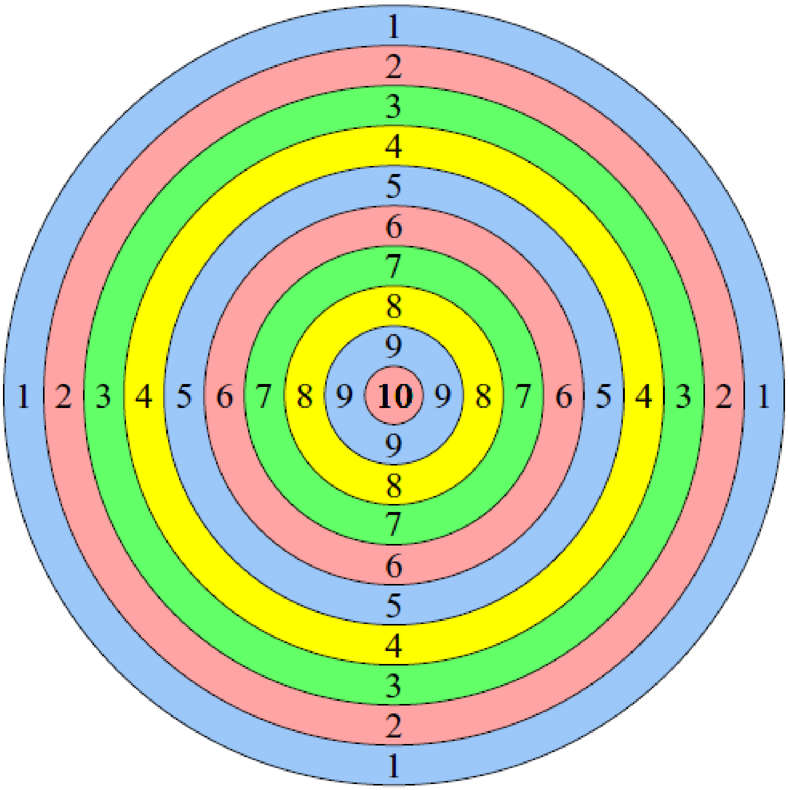
Вероятности попадания в зоны мишени даны в таблице. Число очков, которое получает стрелок, равно номеру зоны.

Таблица. Вероятности попадания в зоны мишени

Зона	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вероятность	0,001	0,002	0,004	0,006	0,021	0,065	0,138	0,243	0,334	0,186

Найдите вероятность события:

а) «стрелок получит меньше 5 очков»;
б) «стрелок получит больше 7 очков»;
в) «стрелок попадёт в жёлтую зону мишени»;
г) «стрелок попал в зелёную зону мишени»;
д) «стрелок не попал в голубую зону мишени»;
е) «стрелок попал в красную зону и при этом выбил больше 3 очков».



Желательный результат обсуждения. Попадание в каждую зону — элементарное событие данного эксперимента. Для решения каждого пункта необходимо определить, попадание в какие зона благоприятствует данному событию, и сложить вероятности этих элементарных событий.

Ответы: а) 0,013; б) 0,763; в) 0,249; г) 0,142; д) 0,644; е) 0,251.

Пример 5. Симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность события:

а) «решек выпало больше, чем орлов»;
б) «выпало два орла подряд»;
в) «во второй раз выпала решка, и орёл выпал хотя бы раз».

Желательный результат обсуждения.

В данном эксперименте 8 элементарных исходов, все они равновозможны. Их можно записать в строчку (ООО, ООР, и т.д.) или таблицей (см. рис.).

1	О	О	О
2	О	О	Р
3	О	Р	О
4	О	Р	Р
5	Р	О	О
6	Р	О	Р
7	Р	Р	О
8	Р	Р	Р

Вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{8}$. Для решения каждого пункта необходимо посчитать, сколько элементарных исходов благоприятствует событию, и затем найти искомую вероятность умножением этой вероятности на число благоприятствующих исходов.

1	О	О	О
2	О	О	Р
3	О	Р	О
4	О	Р	Р
5	Р	О	О
6	Р	О	Р
7	Р	Р	О
8	Р	Р	Р

а) Из таблицы видно (см. рис. справа), что нужному событию благоприятствует четыре элементарных исхода, поэтому искомая вероятность равна $4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

Стоит обсудить и другой способ решения. Решек не может выпасть поровну. Поэтому может произойти либо событие A = «орлов больше, чем решек», либо его отрицание: $\overline{A}$ = «решек больше, чем орлов». В силу симметрии вероятности этих событий равны: $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\overline{A})$. Как известно, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A})=1$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\overline{A})=0{,}5.$$

б) Искомая вероятность равна $3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

1	О	О	О
2	О	О	Р
3	О	Р	О
4	О	Р	Р
5	Р	О	О
6	Р	О	Р
7	Р	Р	О
8	Р	Р	Р

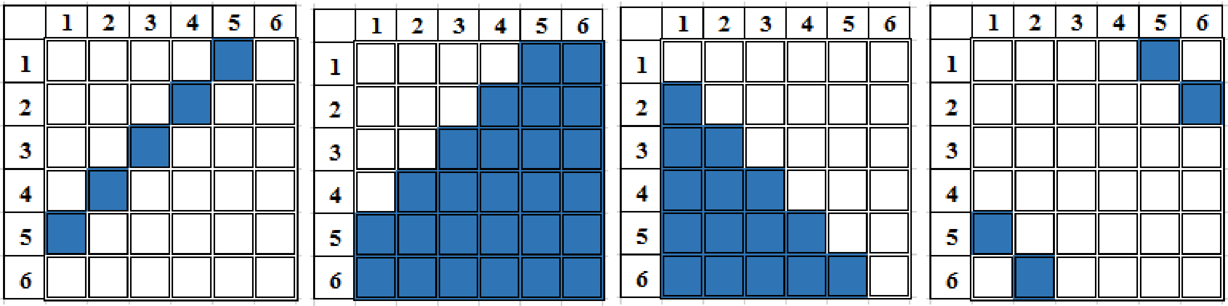
Обратите внимание учеников: формулировку «выпало два орла подряд» некоторые люди понимают так, что выпало *ровно* два орла подряд, а три не выпало. В этом случае ответ будет другой. Но это не значит, что задача имеет два разных ответа. По-разному трактуя условие, мы получаем две разные задачи. Можно было бы чуть изменить формулировку: *хотя бы два орла подряд*. Но урок — не учебник. Поэтому лучше обсудить эту тонкость на уроке, пользуясь случаем. Поскольку в формулировке события отсутствует слово «ровно», разумно считать, что более двух орлов также может быть.

в) Благоприятствующих элементарных событий 3. Искомая вероятность равна $3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

Пример 6. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

а) «сумма выпавших очков равна 6»;
б) «сумма выпавших очков больше, чем 5»;
в) «при первом броске выпало больше очков, чем при втором»;
г) «количество очков, выпавших в первый раз, и количество очков, выпавших во второй раз, отличаются на 4».

Желательный результат обсуждения. В эксперименте 36 равновозможных элементарных исходов. Составим таблицу эксперимента.



а) б) в) г)

Рис. к примеру 6

а) Искомая вероятность равна $5\cdot\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$ (см. рис. а).

б) Тут проще найти вероятность противоположного события «сумма выпавших очков не превосходит 5» (см. рис. б). Эта вероятность равна $10\cdot\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$, откуда искомая вероятность равна $1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

в) См. рис. в. Ответ: $\frac{5}{12}$. Обратите внимание учеников на то, что главная диагональ таблицы — это элементарные исходы, где при первом и при втором броске выпало одинаковое количество очков. Выше главной диагонали событие «при первом броске выпало меньше очков, чем при втором», а ниже — симметричное событие «при первом броске выпало больше очков, чем при втором». Именно это событие нам и нужно.

Можно пересчитать клетки по одной (их всего 15 из 36), а можно, поступить иначе: найти вероятность того, что очков выпало поровну $\left(\frac{1}{6}\right)$, вычесть ее из единицы и результат разделить пополам: $\left(1-\frac{1}{6}\right):2=\frac{5}{12}$.

г) См. рис. г. Ответ: $\frac{1}{9}$.

Пример 7. В некотором опыте возможно три элементарных события a, b и c. Вероятность того, что наступит либо a, либо b, равна 0,4, вероятность того, что наступит либо a, либо c, равна 0,7. Найдите вероятность каждого из элементарных событий.

Желательный результат обсуждения. Из условия следует, что

$$\begin{cases} \mathrm{P}(a)+\mathrm{P}(b)=0,4 \\ \mathrm{P}(a)+\mathrm{P}(c)=0,7. \end{cases}$$

Сложим оба равенства и получим: $2\mathrm{P}(a)+\mathrm{P}(b)+\mathrm{P}(c)=1{,}1$. Вычтем из этого равенства равенство $\mathrm{P}(a)+\mathrm{P}(b)+\mathrm{P}(c)=1$. Получается, что $\mathrm{P}(a)=0{,}1$. Теперь по очереди находим: $\mathrm{P}(b)=0{,}3$ и $\mathrm{P}(c)=0{,}6$.

Выводы и итоги урока. Если в случайном опыте известны вероятности элементарных событий, то можно найти вероятность любого события. Для этого нужно сложить вероятности всех благоприятствующих элементарных событий. В опытах с монетой и игральной костью мы находим вероятности элементарных событий равновозможными из-за симметрии. В других опытах вероятности элементарных событий должны быть даны по условию (см. примеры 3 и 4). Это можно сделать в учебных задачах. В жизненных вероятностных задачах вероятности элементарных событий приходится оценивать с помощью частот или приблизительно находить другими способами.

Рекомендуемое домашнее задание: см. Приложение.

Приложение

Домашнее задание

1. В случайном опыте четыре элементарных события a, b, c и d, вероятности которых соответственно равны 0,1, 0,3, 0,4 и 0,2. Найдите вероятность события, которому благоприятствуют элементарные события:

а) a и c; б) a, b и d; в) b, d и c; г) a и d.

2. В некотором опыте возможно три элементарных события a, b и c. Вероятность того, что наступит либо b, либо c, равна 0,83. Найдите вероятность элементарного события a.

3. Симметричную монету бросают два раза. Найдите вероятность события:

а) «решка выпала хотя бы один раз»;
б) «в первый раз выпал орёл».

4. Игральную кость бросают дважды. С помощью таблицы этого эксперимента найдите количество благоприятствующих элементарных событий и вероятность события:

а) «сумма выпавших очков делится на 5»;
б) «сумма выпавших очков меньше, чем 8»;
в) «произведение выпавших очков делится на 12»;
г) «количество очков, выпавших в первый раз, и количество очков, выпавших во второй раз, отличаются на 3».

5. В некотором опыте возможно три элементарных события a, b и c. Вероятность того, что наступит либо a, либо b, равна 0,6, вероятность того, что наступит либо b, либо c, равна 0,8. Найдите вероятность каждого из элементарных событий.