ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 8 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 11. Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события

Примерный сценарий урока по теме «Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]*. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.*

Цель урока — продолжить формирование у учащихся представления об элементарных событиях и первичного навыка определения вероятностей элементарных событий, исходя из устройства случайного опыта.

Повторение (устно). Обсудите с учащимися следующие вопросы.

1. Школьник говорит: «Я написал изложение и не сделал ни одной ошибки». Что здесь является случайным опытом, а что — случайным событием?

2. В классе 25 учеников. Учитель во время урока вызывает к доске одного ученика. Сколько различных элементарных событий имеет этот случайный опыт?

3. Могут ли в результате опыта одновременно наступить два различных элементарных события?

4. Перечислите элементарные события опыта, в котором игральную кость бросают один раз.

5. Назовите элементарные события, которые возникают при бросании математической монеты.

6. Что является элементарным событием в опыте, в котором игральную кость бросают два раза? Сколько элементарных событий в этом опыте?

Новый материал

Описание случайного опыта подразумевает описание элементарных событий (исходов). Элементарные события бывают описаны явно или неявно. Если в каком-то опыте элементарные события не удаётся выделить, или не удаётся подходящим способом назначить вероятности элементарным событиям, то невозможно решать задачи, связанные с этим опытом.

---

[1] Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

Пример 1. В опыте с двукратным бросанием монеты четыре элементарных события:

ОО, ОР, РО, РР.

Любое событие в этом эксперименте можно составить из этих элементарных событий. Например, событие «выпал ровно один орёл» состоит из двух элементарных событий: ОР и РО. Событие «решка выпала хотя бы один раз» — из трёх: ОР, РО, РР.

Каждое элементарное событие случайного опыта может осуществиться с некоторой вероятностью. У разных элементарных событий эти вероятности могут быть разными. В некоторых случаях вероятности элементарных событий можно рассчитать. В других случаях их приближенно можно найти из наблюдений. А в некоторых случайных опытах вероятности элементарных событий остаются неизвестными.

Вероятности событий мы будем обозначать буквой P латинского алфавита, по начальной букве латинского слова *«probabilitas»,* что и значит «вероятность».

Пример 2. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором всего три элементарных события. Обозначим их латинскими буквами a, b, c. Вероятности этих элементарных равны $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}(b)$, $\mathrm{P}(c)$. Каждая вероятность — это число от 0 до 1.

Вероятности элементарных событий обладают важным свойством: сумма вероятностей всех элементарных событий случайного опыта равна 1. В данном случае

$$\mathrm{P}(a) + \mathrm{P}(b) + \mathrm{P}(c) = 1.$$

Важно! Сумма вероятностей всех элементарных событий случайного опыта равна 1.

Пример 3. Случайный опыт может закончиться одним из трех элементарных событий: a, b или c. Чему равна вероятность элементарного события c, если:

а) $\mathrm{P}(a)=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(b)=\frac{1}{3}$; б) $\mathrm{P}(a)=0{,}4, \mathrm{P}(b)=0{,}2$; в) $\mathrm{P}(a) = 0{,}1$, $\mathrm{P}(b) = 0{,}01$?

Ответы: а) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; б) $1-0{,}4-0{,}2=0{,}4$; в) $1-0{,}1-0{,}01=0{,}89$.

Это свойство вероятностей отражает такое же свойства частот.

Пример 4. В таблице приведены результаты опроса, проведённого среди посетителей торгового центра перед открытием нового кафе.

Опрос посетителей

Какой кофе вы предпочитаете?			
Эспрессо	**Американо**	**Капучино**	**Латте**
137	288	410	165

Найдите частоту каждого ответа. Чему равна сумма частот?

Желательный результат обсуждения. Всего в опросе приняло участие $137+288+410+165=1000$ человек. Частоты каждого ответа:

Эспрессо	Американо	Капучино	Латте
0,137	0,288	0,410	0,165

Сумма частот равна 1.

Пример 5. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором всего четыре элементарные события: a, b, c и d. Повторим опыт N раз. Пусть элементарное событие a произошло $N(a)$ раз, событие b произошло $N(b)$ раз, событие c произошло $N(c)$ раз и событие d произошло $N(d)$ раз. Значит, частоты событий a, b, c и d соответственно равны $\frac{N(a)}{N}$, $\frac{N(b)}{N}$, $\frac{N(c)}{N}$ и $\frac{N(d)}{N}$. Ясно, что всего элементарных событий случилось столько, сколько было проведено опытов: $N(a)+N(b)+N(c)+N(d)=N$.

Поэтому сумма частот элементарных событий a, b, c и d равна 1:

$$\frac{N(A)}{N}+\frac{N(b)}{N}+\frac{N(c)}{N}+\frac{N(d)}{N}=\frac{N}{N}=1$$

Это свойство вероятностей и частот элементарных событий верно для любого случайного опыта, независимо от того, сколько он имеет элементарных событий.

Комментарий. В хорошо подготовленном классе желательно провести выкладки для опыта, в котором произвольное число элементарных событий n. Если класс недостаточно подготовлен, можно ограничиться опытом с тремя-четырьмя событиями.

Желательный результат обсуждения. Если приведен пример для опыта с тремя-четырьмя элементарными событиями, то после решения следует обязательно сделать словесное обобщение: «Такой же результат будет, если элементарных событий в опыте 5, 6 или любое другое число».

Второй важный элемент обсуждения. В этом примере речь шла не о вероятностях, а о частотах элементарных событий. Очень часто вероятности элементарных событий неизвестны. Но зато можно найти их частоты, проведя один и тот же эксперимент много раз. Сходство свойств вероятностей и частот позволяет утверждать, что при большом числе экспериментов частоты близки к вероятностям. Поэтому при неизвестных вероятностях мы часто используем измеренные частоты. Почему и при каких условиях вероятности и частоты можно считать близкими — это сложный вопрос, который изучается теорией вероятностей. Обязательное условие — многократное проведение эксперимента в одинаковых условиях. Тогда начинает действовать закон больших чисел, и можно считать, что частоты мало отличаются от настоящих, но неизвестных вероятностей.

Пример 6. Некоторая игральная кость несимметрична: вероятность выбросить 1 очко равна $\frac{1}{4}$, вероятность 2 очков равна $\frac{1}{12}$, вероятность 3 очков равна $\frac{1}{4}$, 5 очков — $\frac{1}{12}$, а вероятность выбросить 6 очков равна $\frac{1}{6}$. Найдите вероятность выбросить 4 очка.

Ответ: $1-\frac{1}{4}\cdot 2-\frac{1}{12}\cdot 2-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

Опыты с равновозможными элементарными событиями

В некоторых опытах все элементарные события имеют одинаковые шансы. Например, при бросании монеты шансы орла и решки одинаковы. Еще пример: при бросании правильной игральной кости шансы у всех граней одинаковы.

Если в опыте все элементарные события имеют одинаковые шансы, то такой опыт называется ***опытом с равновозможными элементарными событиями***.

Найдём вероятности элементарных событий в случайном опыте, в котором элементарные события равновозможны. Предположим, что в опыте N равновозможных элементарных событий. Пусть вероятность каждого элементарного события равна p. Сумма всех вероятностей равна 1, то есть

$$\underbrace{p+p+p+\ldots+p+p}_{N\text{ одинаковых слагаемых}}=1.$$

Значит, $N\cdot p=1$, откуда $p=\frac{1}{N}$.

Важно! Если в случайном опыте ровно N равновозможных элементарных событий, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N}$.

Желательный результат обсуждения. Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями возникают при бросании костей, раздаче игральных карт, при розыгрыше лотереи, в жребиях, в социальных исследованиях и т. п. В природных явлениях опыты, в которых элементарные события равновозможны, встречаются крайне редко. Попросите школьников привести ещё примеры опытов с равновозможными элементарными событиями. Окажется, что это очень непросто: при случайной рассадке пассажиров в автобусе места у окна чаще достаются детям; при случайной, казалось бы, расстановке книг на полке ближе к краю оказываются книги, которые чаще читают, и т.п. Можно ли считать случайным порядок, в котором трое друзей становятся в очередь? Обсудите за и против. Обсудите факторы, которые могут повлиять на шансы разных вариантов. Удастся ли хотя бы кому-нибудь привести какой-нибудь пример природного случайного явления, где элементарные события равновозможны?

Если в природе опытов с равновозможными событиями практически нет, то зачем их изучать?

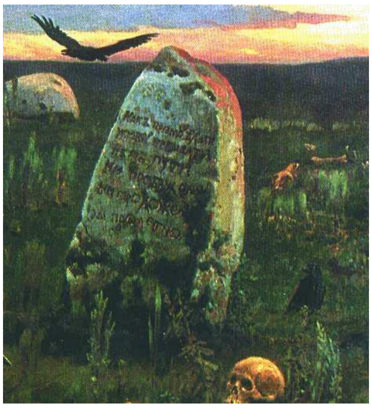
1. На этих опытах удобно видеть общие закономерности.

2. С помощью опытов с равновозможными элементарными исходами удаётся моделировать реальные опыты, в которых элементарные события не равновозможны, а также природные и социальные явления. Примеры: испытание лекарств, контроль качества продукции, выборочный контроль товаров, проходящих через таможню, социологические опросы, страхование и массовое обслуживание и т.п.

Пример 7. Случайный эксперимент заключается в бросании двух игральных костей. Сколько элементарных событий в этом эксперименте, равновозможны ли они? Найдите вероятность того, что выпадут две шестерки.

Желательный результат обсуждения. При бросании двух игральных костей элементарных событий 36, и все они равновозможны. Поэтому вероятность каждого равна $\frac{1}{36}$, в том числе и вероятность события «Выпало две шестёрки».

Пример 8. Три богатыря Илья Муромец, Алеша Попович и Добрыня Никитич ехали по дороге и увидели развилку, а на ней — придорожный камень с предупреждением:



Направо поедешь — коня потеряешь,
Налево поедешь — копье потеряешь,
Прямо поедешь — головы не снесешь.

Богатыри разделились, и каждый поехал своей дорогой. Придумайте систему обозначений для элементарных событий этого опыта, запишите все элементарные события. Считая их равновозможными, найдите вероятность каждого из них.

Желательный результат обсуждения. Условие задачи можно понять так, что никакие два богатыря не поехали одной дорогой. Будем исходить из этого предположения. Элементарным событием в этом опыте является выбор — кто куда поедет. Можно записать каждое элементарное событие тремя буквами. Например, ИАД. Это событие состоит в том, что Илья Муромец поехал налево, Алёша Попович — прямо, а Добрыня Никитич — направо. Элементарных событий всего 6:

ИАД, ИДА, АИД, АДИ, ДИА, ДАИ.

В задаче предлагается считать все варианты равновозможными. Окажутся ли они равновозможными, если решение принимал кто-то один, или даже если богатыри посовещались? Вряд ли. Скорее всего, богатыри бросили жребий — кому куда выпадет ехать. Только так можно обеспечить равновозможность всех элементарных событий. Вероятность каждого равна $\frac{1}{6}$.

Выводы и итоги урока.

В каждом опыте нужно найти и описать элементарные события и понять, как подходящим образом назначить им вероятности. Сумма вероятностей всех элементарных событий равна единице.

Опыты, в которых все элементарные события имеют одинаковые шансы, называются *опытами с равновозможными элементарными событиями*.

Если в случайном опыте ровно N равновозможных элементарных событий, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N}$.

Практически все опыты с равновозможными событиями — искусственные. Тем не менее, изучение этих опытов важно и нужно.

Рекомендуемое домашнее задание: см. Приложение

Приложение

Домашнее задание

1. Случайный опыт может закончиться одним из трех элементарных событий: a, b или c. Чему равна вероятность элементарного события c, если $P(a) = p$, $P(b) = 0{,}8 - p$. Какие значения может принимать p?

2. В некотором случайном эксперименте все элементарные события равновозможны. Найдите вероятность каждого элементарного события, если всего в этом эксперименте количество элементарных событий равно 25.

3. Все элементарные события случайного опыта равновозможны. Сколько элементарных событий в этом опыте, если вероятность каждого равна:

$$\text{а) } 0{,}2; \quad \text{б) } \frac{1}{k}.$$

4. В каждом из двух случайных опытов все элементарные события равновозможны. В каком из этих опытов вероятность элементарного события больше, если в первом опыте элементарных событий больше, чем во втором?

5. Три первоклассника по очереди покупают воздушные шарики. Каждый из них покупает шарик одного из двух цветов: зеленого (З) или синего (С). Выпишите элементарные события этого эксперимента. Считая, что все они равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

6*. Пользуясь обозначениями О для орла и Р для решки, приведите пример элементарного события в опыте, где монету подбрасывают пять раз. Сколько элементарных событий в таком опыте? Равновозможны ли они? Найдите вероятность каждого элементарного события в этом опыте.

7*. Случайный опыт состоит в том, что Красная Шапочка идет от домика мамы к домику бабушки. Красная Шапочка может идти только по дорожкам слева направо. Схема дорожек показана на рис. XX. Каждая дорожка обозначена буквой. Элементарным событием в этом опыте является выбранный путь. Например, ax или bz.

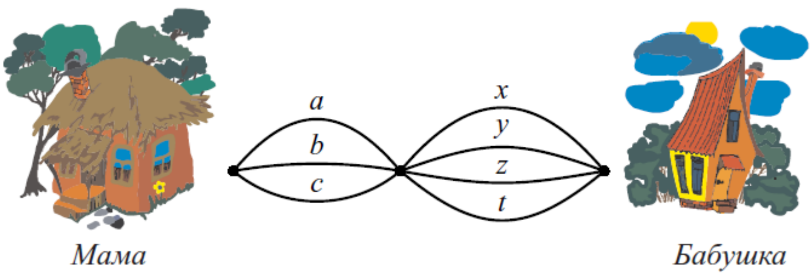


Рис. XX.

Считая, что все элементарные события равновозможны, найдите вероятность каждого из них.