III Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
19 – 25 ноября 2025 г.

Отборочный этап 8-9 классы

1. В тесте 10 английских слов и 10 их русских переводов, идущих в другом порядке. На пятерку нужно установить верно все десять соответствий между словами и переводами. За каждое неправильно установленное соответствие снимается один балл.
Поскольку Вася не знает ни одного английского слова, он установил все 10 соответствий случайным образом. Найдите вероятность того, что Вася получит четверку.

Ответ: 0.

Решение. Вася получит четверку, если он правильно установит ровно 9 соответствий из 10. Но если установлено 9 соответствий, то десятое тоже установлено верно, поэтому ровно 9 соответствий установить нельзя.

2. В графе нет петель и кратных ребер, а вершин на 4 меньше, чем ребер. Какое наименьшее количество циклов может быть в таком графе?

Ответ: 5

Решение. Пусть в этом графе n вершин, $n+4$ ребра и не более четырех циклов. Разомкнем циклы так, чтобы граф остался связным. Это можно сделать, убрав не более четырех ребер и не удаляя вершины. В результате получится дерево, в котором n вершин и не менее n ребер. Противоречие с тем, что в дереве ребер на единицу меньше, чем вершин.
Легко предъявить граф с пятью циклами, который удовлетворяет условию.

3. Из множества натуральных чисел от 1 до 10 выбирают случайно и независимо друг от друга три числа. Найдите вероятность того, что какие-то два из них в сумме дают 11.

Ответ: 0,27.

Решение. Пусть выбраны числа a, b и c. Рассмотрим три события

$$A=\{b+c=11\},\ B=\{a+c=11\} \text{ и } C=\{a+b=11\}.$$

Искомая вероятность равна

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C).$$

Вероятности событий A, B и C одинаковы:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=\frac{1}{10}.$$

Вероятности попарных пересечений этих событий тоже одинаковы:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{100},$$

а $\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=0$, поскольку все три пары дают в сумме одно и то же число, только если $a=b=c$, что невозможно, поскольку число 11 нечетно.
Следовательно,

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=3\cdot\frac{1}{10}-3\cdot\frac{1}{100}=\frac{27}{100}=0,27.$$

4. Новая банковская интеллектуальная программа блокирует в среднем 96% мошеннических переводов, но ошибочно считает подозрительными и блокирует в среднем 1% добросовестных переводов. Действуя таким образом, программа блокирует в среднем 1,19% всех переводов. Найдите вероятность того, что случайно выбранный перевод – мошеннический.

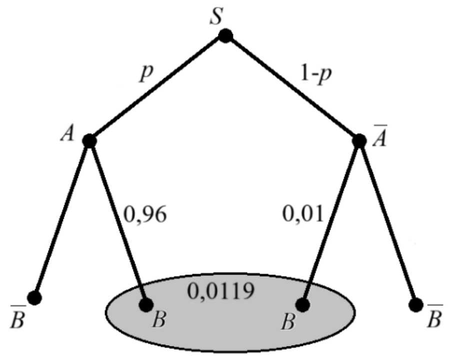
Ответ: 0,002.

Решение. Построим дерево случайного опыта. Событие A состоит в том, что случайно выбранный перевод мошеннический, а событие B – в том, что случайно выбранный перевод блокируется программой. Известны следующие вероятности:

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=0{,}96 \text{ и } \mathrm{P}(B\,|\,\bar{A})=0{,}01.$$

Также известно, что $\mathrm{P}(B)=0{,}0119$. Пусть $\mathrm{P}(A)=p$. Тогда по формуле полной вероятности

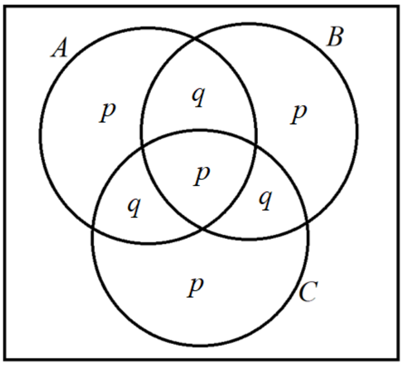
$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B\,|\,A)\cdot\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\,|\,\bar{A})\cdot\mathrm{P}(\bar{A}).$$



Подставив известные значения, получим уравнение

$$0{,}96\cdot p+0{,}01\cdot(1-p)=0{,}0119\text{, откуда } p=0{,}002.$$

5. На рисунке изображена диаграмма Эйлера для событий A, B и C в некотором случайном опыте. В семи областях диаграммы указаны вероятности соответствующих событий. Известно, что события A и B независимы и что их вероятности больше нуля. Найдите вероятность события $(A\cup B\cup C)\cap\overline{(A\cap B\cap C)}$.



Ответ: 0,75.

Решение. Из независимости событий A и B следует:1

$$(2p+2q)^2=p+q\text{. Значит, } p+q=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, событие $(A\cup B\cup C)\cap\overline{(A\cap B\cap C)}$ (наступило хотя бы одно из событий A, B и C, но не все три вместе), имеет вероятность $3p+3q=\frac{3}{4}$.

6. Компания А. выпустила на рынок акции ценой 100, 200, 300, 400 и 500 р. В портфеле акционера Б. средняя цена акций компании А. равна 166 рублям с копейками. Вчера Б. купил еще одну акцию за 500 р, но средняя цена его акций все равно не достигла 200 р. Какое наименьшее количество акций могло быть у Б. до покупки последней акции?

Ответ: 12.

Решение. Пусть акций было целое число n. Их суммарная стоимость больше чем $166n$ р., но меньше чем $167n$ р. После покупки акции за 500 р. средняя стоимость акций y р. стала удовлетворять неравенствам

$$\frac{166n+500}{n+1}<y<200\text{, откуда } 17n>150\text{, то есть } n\geqslant 9.$$

Если $n=9$, то суммарная стоимость акций находится в интервале от $9\cdot166=1494$ р. до $9\cdot167=1503$ р. Значит, она равна 1500 р., поскольку эта величина должна делиться на 100 р. Но тогда новая средняя цена равна $2000:10=200$ р., а это противоречит условию.

Если $n=10$ или $n=11$, то суммарная стоимость n акций находится в интервалах от 1660 до 1670 или от 1826 до 1837 р. соответственно, а поэтому не делится на 100.
При $n=12$ суммарная стоимость акций равна 2000 р. (например, 8 акций по 200 р. и 4 акции по 100 р.). После покупки последней акции средняя цена составила

$$2500:13<200 \text{ р.},$$

и все условия задачи выполнены.

7. В крупном отделе компании 7 человек получают зарплату по 55 тыс. р. в месяц, 8 человек получают по 68 тыс. р., 6 человек получают по 90 тыс. р. и 2 человека – по 110 тыс. р.
Перед Новым Годом совет директоров компании выделил на премирование сотрудников отдела 300 тыс. р. Эта сумма будет добавлена к декабрьской зарплате. Начальник отдела хочет распределить премии так, чтобы медиана общих выплат сотрудникам в декабре оказалась наибольшей возможной (это важный показатель работы начальника). Найдите эту наибольшую возможную медианную выплату.

Ответ: 111000.

Решение. Всего в компании 23 сотрудника, и медианная зарплата равна 68 тыс. р. Пусть новая медианная выплата после премирования равна m тыс. р. Это значит, что не менее 12 сотрудников получат в декабре выплату m тыс. р или больше. Чтобы сделать m как можно больше, нужно премировать только высокооплачиваемых сотрудников.

Предположим, что $m>110$. Тогда премию $m-110$ тыс. р. должны получить те, кто получает 110 тыс. р., премию $m-90$ тыс. р. должны получить те, кто получает 90 тыс. р., и еще 4 сотрудника с зарплатой 68 тыс. р. должны получить премию $m-68$ тыс. р. Общая премия равна 300 тыс. р., поэтому

$$2(m-110)+6(m-90)+4(m-66)=200,$$

откуда $12m=1332$, то есть $m=111$. Это согласуется с нашим предположением, что $m>110$. Это и есть наибольшее возможное значение m.

8. Симметричный игральный кубик бросают много раз. Какова вероятность того, что перед тем как первый раз выпадет грань с нечетным числом, все грани с четными числами выпадут хотя бы по разу?

Ответ: 0,05

Решение. Пусть первый раз выпало четное число. Вероятность этого равна $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Если это случилось, то второе новое число (которое еще не выпадало) окажется четным с вероятностью $\frac{2}{5}$, а третье новое число окажется четным с вероятностью $\frac{1}{4}$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$.

Другое решение. Рассмотрим подпоследовательность выпадающих граней, состоящую из чисел, которые не выпадали раньше. В этой подпоследовательности ровно шесть чисел от 1 до 6 в произвольном порядке. Первыми в ней идут три четных числа с вероятностью

$$\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}.$$

9. В некотором графе степень каждой вершины равна 3. Каждая пара вершин соединена или ребром, или цепью длины 2. Найдите наибольшее возможное количество вершин в таком графе.

Ответ: 10.

Решение. **Оценка**. Пусть в графе n вершин. Тогда сумма всех степеней равна $3n$, а общее число ребер равно $\frac{3n}{2}$.

Рассмотрим все 2-цепи (цепи длины 2) в этом графе. Каждая вершина является промежуточной не более чем в $C_3^2 = 3$ таких цепях (на рисунке 1 нарисованы цепи для промежуточной вершины степени 3). Таким образом, всего в графе 2-цепей не больше чем $3n$.

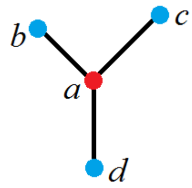


Рис. 1. Вершина a является промежуточной в цепях *bad*, *bac* и *dac*

Любые две вершины связаны ребром или 2-цепью. Поэтому имеющиеся ребра и 2-цепи связывают не более чем $\frac{3n}{2} + 3n = \frac{9n}{2}$ пар вершин. Общее число пар вершин равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Должно выполняться неравенство $\frac{n(n-1)}{2} \le \frac{9n}{2}$, откуда $n \le 10$.

Пример. Граф с 10 вершинами на рис. 2 удовлетворяет условию.

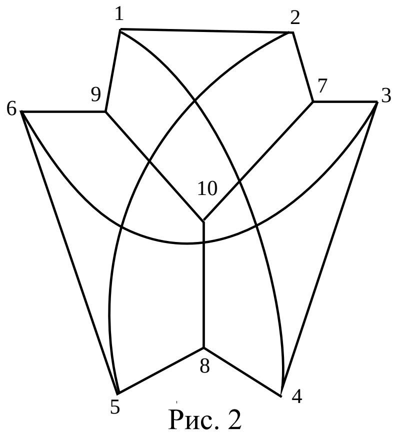


Рис. 2