II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 2024. Дистанционный этап. 8-9 классы. Условия, ответы и решения

Задача 1. Футбольные команды «Физик» и «Лирик» играют друг с другом. Вероятность того, что они сыграют вничью, равна 0,1. В этом матче шансы на победу команды «Физик» в два раза выше, чем у команды «Лирик». Найдите вероятность того, что «Физик» не выиграет.
Ответ: 0,4.

Задача 2. Дан числовой массив из 10 чисел, дисперсия массива равна 14. Если к каждому числу массива прибавить одно и то же число, то получится новый массив. Какой наименьшей может быть сумма квадратов чисел нового массива?

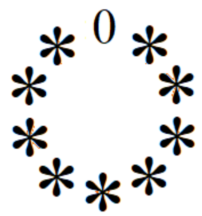
Ответ: 140.
Решение. Если добавленное число противоположно среднему арифметическому исходного массива, то средний квадрат чисел нового массива окажется равен его дисперсии, то есть 14.

Задача 3. Фишка стоит на числовой прямой в точке 0. Симметричную монету подбрасывают 2000 раз и при каждом броске двигают фишку на единицу вправо, если выпал орёл, или на единицу влево, если выпала решка. Получается случайное блуждание. *Размахом блуждания* назовём разность между наибольшей и наименьшей координатами фишки за время блуждания. Известно, что выпало ровно 1100 орлов.

Сколько существует различных последовательностей движения фишки, при которых размах блуждания равен 1100?

Ответ: 901.
Решение. Очевидно, 1100 – наибольший возможный размах, который получится, если все шаги вправо фишка делает подряд. Первый шаг вправо может быть по счёту первым, вторым и так далее до шага с номером 901. Всего 901 способ.

Задача 4. В вершинах десятиугольника расположены цифра 0 и девять звездочек. Нужно поставить все цифры от 1 до 9 вместо звездочек так, чтобы любые две соседние цифры, включая ноль, отличались на 7 или давали в сумме число, которое делится на 3. Предложите один какой-нибудь вариант. В ответе запишите десять цифр по часовой стрелке подряд, начиная с нуля.



Ответ. Любой из следующих вариантов:

0369245187, 0369248157, 0369215487, 0369218457,
0639245187, 0639248157, 0639215487 и 0639218457.

Все они получаются друг из друга перестановками цифр внутри пар (3, 6), (1, 4) и (5, 8).
Решение. Решение можно найти следующим образом: нарисовать граф, вершины которого – цифры от 0 до 9 и две цифры связаны ребром, только если выполняются условия, а затем выбрать в этом графе цикл, проходящий через все вершины (*гамильтонов цикл*).

Задача 5. Квантик и Ноутик по очереди записывают числа: Квантик на доске, Ноутик в тетрадке. Как только Квантик пишет число, Ноутик ищет медиану* всех записанных на доске чисел и заносит её к себе в тетрадку. В ней оказались записаны числа 2, 4, 6, 5. Какое число Квантик написал на доске четвёртым по счёту?

*Если в наборе чётное количество чисел, то Ноутик находит медиану как среднее арифметическое двух средних по величине.

Ответ: 4.

Решение. Первое число, очевидно, 2. Чтобы медиана первых двух чисел была равна 4, второе число должно быть равно 6. Обозначим третье число x:

$$2\ \ 6\ \ x.$$

Медиана теперь равна 6, а это может быть, только если $x \geq 6$. Добавим последнее число:

$$2,\ 6,\ x \geq 6,\ y.$$

Если $y \geq 6$, то медиана полученного набора тоже не меньше, чем 6. Но по условию она равна 5. Следовательно, $y < 6$. Если $y \leq 2$, то медиана будет равна 4. Значит, $2 < y < 6$. В этом случае медиана равна $\frac{y+6}{2}$. Из уравнения $\frac{y+6}{2} = 5$ находим $y = 4$.

Задача 6. Вероятность того, что купленный налобный фонарик будет исправен, равна 0,9. Сколько фонариков достаточно купить, чтобы с вероятностью не меньше чем 0,98 среди них нашлось хотя бы два исправных? В ответе укажите наименьшее нужное количество.

Ответ: 4.

Решение. Купим n фонариков. Вероятность события «*исправных нет или один*» равна $0{,}1^n + n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^{n-1}$. Найдем наименьшее n, при котором эта вероятность не больше чем 0,02.

При $n = 2$ получаем $0{,}01 + 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}19 > 0{,}02$.

При $n = 3$, получаем $0{,}001 + 3 \cdot 0{,}009 = 0{,}028 > 0{,}02$.

При $n = 4$ получаем верное неравенство: $0{,}0001 + 4 \cdot 0{,}0009 = 0{,}0037 < 0{,}02$.

При $n > 4$ вероятность ещё меньше.

Задача 7. В случайном опыте ровно 5 равновозможных элементарных событий. Рассмотрим все возможные события этого опыта. Сколько из них можно выбрать пар различных независимых событий?

Ответ: 61 или 122.

Решение. Предположим, что какие-то два события A и B независимы, что событию A благоприятствует a, событию B – b, а событию $A \cap B$ – c элементарных событий. Тогда выполняется равенство

$$\frac{a}{5} \cdot \frac{b}{5} = \frac{c}{5},$$

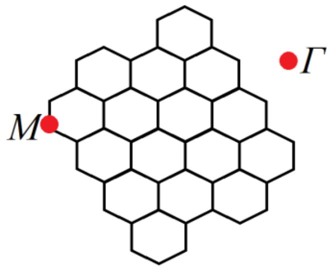
то есть $ab = 5c$. Число 5 простое, и все числа не больше чем 5. Значит, либо $a = 5, c = b$, либо $b = 5, a = c$, либо какое-то из чисел a и b равно нулю (тогда и $c = 0$). Получается, что хотя бы одно из событий A или B либо достоверное, либо невозможное.

Если одно из событий достоверное, то в пару ему можно подобрать любое из оставшихся событий, а их осталось $2^5 - 1 = 31$.

Если одно из событий невозможное, то в пару ему можно подобрать любое из оставшихся событий.

При этом дважды посчитана пара, состоящая из невозможного и достоверного событий. Значит, всего пар независимых событий $31 + 31 - 1 = 61$.

Задача 8. На столе из одинаковых спичек выложили 16 маленьких шестиугольников, как показано на рисунке. В самой левой вершине получившегося графа сидит муравей M, а в точке $Г$ снаружи сидит гусеница. Муравей умеет ползать только по спичкам, а гусеница не умеет переползать через спички. Сколько спичек нужно убрать, чтобы гусеница могла проползти в центр



любого шестиугольника, а муравей мог доползти до любой вершины любого шестиугольника?

Ответ: 16.
Решение. В графе 48 вершин и 63 ребра. Чтобы оба условия выполнялись, после удаления рёбер-спичек должно остаться дерево, содержащее все вершины. В этом дереве будет 47 рёбер. Следовательно, нужно убрать $63-47=16$ спичек.

Задача 9. Знайка бросает монету 2025 раз, а Незнайка – 2024 раза. Выигрывает тот, у кого выпало больше орлов. Если орлов поровну, наступает ничья. Какова вероятность выигрыша Знайки?

Ответ: 1/2.
Решение. Пусть Знайка и Незнайка одновременно бросают по монете 2024 раза. Обозначим буквой p вероятность того, что у них орлов поровну. В этом случае Знайка выигрывает, если последним броском выбросит орла; вероятность этого равна $\frac{1}{2}$. Если у Знайки орлов больше, чем у Незнайки (вероятность этого $\frac{1-p}{2}$), то он выигрывает наверняка. Если у Знайки орлов меньше, чем у Незнайки, то Знайка выиграть не может.

Значит, вероятность выигрыша Знайки равна $\frac{1-p}{2}+p\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.