Отборочный этап 7 класс

1. В научно-исследовательском институте чародейства и волшебства работают чародеи и волшебники, при этом волшебников ровно в полтора раза больше, чем чародеев. У чародея Кристобаля Хунты коллег-чародеев на 4 меньше, чем коллег-волшебников. Сколько коллег-волшебников у волшебника Жиана Жиакомо?

Ответ: 8.

Решение. Пусть в НИИЧАВО x чародеев и $1{,}5x$ волшебников. Значит, коллег-чародеев у Кристобаля Хунты $x-1$, откуда

$$(x-1)+4=1{,}5x\text{, а значит, } x=6.$$

Получается 6 чародеев и 9 волшебников. Значит, у Жиана Жиакомо 8 коллег-волшебников.

2. В Алфавитном Царстве все города как-то связаны между собой дорогами. Каждая дорога ведет из одного города в другой и с другими дорогами не пересекается. Из столицы А выходит шесть дорог. Из города Б – пять дорог, из города В – четыре дороги, из города Г – три дороги, а про прочие города от Д до Я мало что известно.

Решил царь объехать свое царство – посмотреть, как люди живут. Поручил он придворному мудрецу начертить маршрут, чтоб проехать по всем дорогам царства и при этом по каждой – ровно один раз, так, чтобы из столицы выехать и в итоге в столицу вернуться,

– Никак невозможно, Ваше величество, – ответил мудрец, – чтоб ровно по разу проехать и ни одну дорогу не пропустить.

– Ладно, – молвил царь. – Одну дорогу, так и быть, пропустить можно.

– Тогда все в порядке, – обрадовался мудрец.

Какие города связывает дорога, по которой не проедет царь?

Ответ: Б и Г.

Решение. В графе дорог нет эйлерова цикла[1], поскольку в нем есть вершины Б и Г нечетной степени. Из слов мудреца следует, что других вершин нечетной степени нет, иначе бы пришлось удалить из маршрута больше одной дороги. Если удалить ребро, отличное от БГ, то количество вершин нечетной степени либо сохранится (удалено ребро с одним из концов Б или Г) или увеличится на 2 (удалено ребро, не примыкающее ни к Б, ни к Г). В таком случае граф по-прежнему не будет содержать эйлерова цикла.

Однако мудрец утверждает, что после удаления одного ребра граф будет содержать эйлеров цикл. Следовательно, единственное ребро, которое может дать решение – это ребро БГ. Мудрец сказал, что после удаления одного ребра нужный путь найдется. Значит, в графе есть ребро БГ, и именно его нужно удалить.

[1] Эйлеров цикл – путь с началом и концом в одной и той же вершине графа, по разу проходящий через все ребра.

3. Из всех семиклассников, получивших задание решить систему линейных уравнений, 80% верно выражают одну переменную через другую. Из тех, кто верно выразил переменную, 60% верно решают систему. Еще 16% семиклассников не выражают переменную, а верно решают систему сложением. Какова доля тех, кто верно выражает переменную, среди тех, кто верно решает систему? Ответ дайте в процентах.

Ответ: 75%.

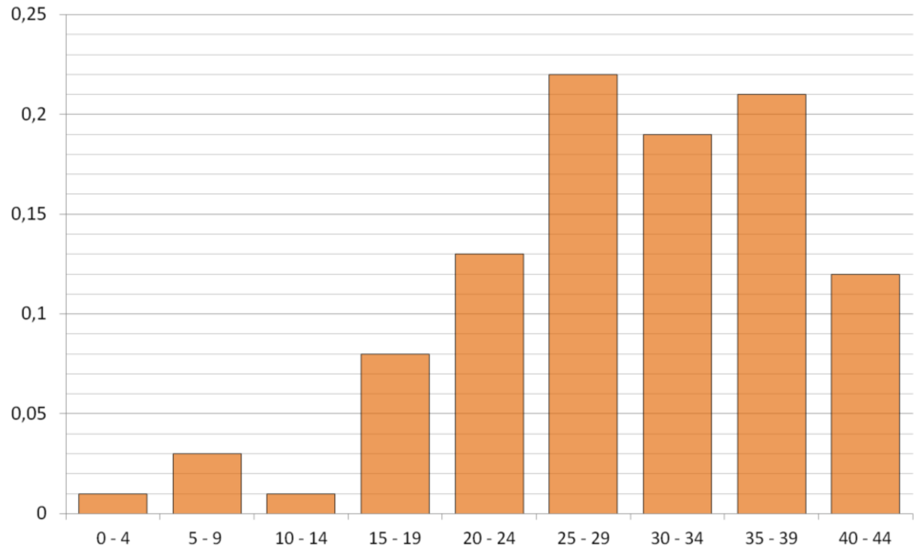
Решение. С помощью выражения неизвестного x или сложения верно решают задачу

$$0,8\cdot 0,6+0,16=0,64$$

всех семиклассников. Доля верно выразивших x среди них равна

$$\frac{0,8\cdot 0,6}{0,64}=0,75.$$

4. В некотором университете прошел экзамен. На диаграмме показано распределение полученных студентами баллов.



Оцените медианный балл, полученный студентами на этом экзамене.

Ответ: любое значение от 30 до 34 (эти ответы оценивались в 1 балл).

Решение. Частота значений в интервале от 0 до 29 равна $0,48<0,5$. Частота значений в интервале от 0 до 34 равна $0,67>0,5$. Значит, медиана находится в интервале значений от 30 до 34.

5. В тесте 10 английских слов и 10 их русских переводов, идущих в другом порядке. На пятерку нужно установить верно все десять соответствий между словами и переводами. За каждое неправильно установленное соответствие снимается один балл.
Поскольку Вася не знает ни одного английского слова, он установил все 10 соответствий случайным образом. Найдите вероятность того, что Вася получит четверку.

Ответ: 0.

Решение. Вася получит четверку, если правильно установит ровно 9 соответствий из 10. Но если установлено 9 соответствий, то десятое также верно, поэтому ровно 9 соответствий установить нельзя.

6. Служить в роте почетного караула может солдат ростом не менее 180 см. Есть четыре отделения 1, 2, 3 и 4, из которых отбирают солдат на службу в роте почетного караула. Известно следующее:
- в отделении 1 средний рост солдат равен 182 см;
- в отделении 2 медиана роста матросов равна 181 см;
- в отделении 3 самый низкий солдат имеет рост 179 см;
- в отделении 4 мода[2] роста солдат равна 181 см.

В каких из этих четырех отделений не менее половины солдат наверняка пройдут отбор по росту в роту почетного караула?

Ответ: Б.

Решение.

В отделении Б не менее половины состава имеет рост не менее 181 см по определению медианы.

Покажем, что остальные отделения могут не удовлетворять этому условию.

Пусть в отделении А десять солдат ростом 188 см и двадцать солдат ростом 179 см. Средний рост 182 см, но в РПК по росту проходят только 10 из 30.

Пусть в отделении В все солдаты ростом 179 см. Служить в РПК не может ни один.

Пусть в отделении Г двенадцать солдат ростом 181 см и по шесть солдат ростом 179, 178 и 177 см. Мода равна 181, но служить в РПК могут только 12 солдат из 30.

7. На собрании акционеров директор крупной компании сообщил следующее.
- Молодыми мы считаем инженеров, пришедших к нам после вуза и отработавших менее трех лет.
- Ежегодно в июле в компанию приходит 50 инженеров после вуза.
- Ежегодно по разным причинам увольняется или уходит в длительный отпуск около 4% молодых инженеров. Эти события не связаны с условиями труда и не зависят ни от времени года, ни от стажа.
- На начало каждого года общее количество молодых инженеров в компании одно и то же, и эту стабильность мы наблюдаем уже много лет.

Оцените количество молодых инженеров в этой компании, считая, что все сказанное – правда.

Ответ: любое число из интервала от 133 до 139.

Решение. Пусть x – число молодых инженеров на начало года. В течение года около трети из них перестанут быть молодыми, поскольку их стаж превысит три года. Из оставшихся примерно 4% уволятся или уйдут в длительный отпуск. Останется примерно $\frac{2}{3}x\cdot 0,96 = 0,64x$ молодых инженеров. В середине года к ним присоединяется 50 выпускников вузов, из которых за полгода примерно 2% тоже покинут работу, а останется около $50\cdot 0,98 = 49$ человек. К началу следующего года число молодых инженеров снова окажется x. Получаем приближенное равенство

$$0,64x + 49 \approx x,$$

откуда $x \approx 136$.

[2] Мода – значение, которое имеет наибольшую частоту в массиве данных.

8. Компания А. выпустила на рынок акции ценой 100, 200, 300, 400 и 500 р. В портфеле акционера Б. средняя цена акций компании А. равна 166 рублям с копейками. Вчера Б. купил еще одну акцию за 500 р, но средняя цена его акций все равно не достигла 200 р. Какое наименьшее количество акций могло быть у Б. до покупки последней акции?

Ответ: 12.

Решение. Пусть акций было n. Их суммарная стоимость больше чем $166n$ р., но меньше чем $167n$ р. После покупки акции за 500 р. средняя стоимость акций y р. стала удовлетворять неравенствам

$$\frac{166n+500}{n+1} < y < 200\text{, откуда } 17n > 150\text{, то есть } n \geqslant 9.$$

Если $n = 9$, то суммарная стоимость акций находится в интервале от $9 \cdot 166 = 1494$ р. до $9 \cdot 167 = 1503$ р. Значит, она равна 1500 р., поскольку эта величина должна делиться на 100 р. Но тогда новая средняя цена равна $2000 : 10 = 200$ р., а это противоречит условию.
Если $n = 10$ или $n = 11$, то суммарная стоимость n акций находится в интервалах от 1660 до 1670 или от 1826 до 1837 р. соответственно, а поэтому не делится на 100.
При $n = 12$ суммарная стоимость акций равна 2000 р. (например, 8 акций по 200 р. и 4 акции по 100 р.). После покупки последней акции средняя цена составила

$$2500 : 13 < 200 \text{ р.,}$$

и все условия задачи выполнены.

9. В крупном отделе компании 7 человек получают зарплату по 55 тыс. р. в месяц, 8 человек получают по 68 тыс. р., 6 человек получают по 90 тыс. р. и 2 человека – по 110 тыс. р.
Совет директоров выделил на премирование сотрудников отдела 300 тыс. р. Эта сумма будет добавлена к декабрьской зарплате. Начальник отдела хочет распределить премии так, чтобы медиана общих выплат сотрудникам в декабре оказалась наибольшей возможной (это важный показатель работы начальника). Найдите эту наибольшую возможную медианную выплату.

Ответ: 111000 (допускается ответ 111 или 111 тыс.)

Решение. Всего в компании 23 сотрудника, и медианная зарплата равна 68 тыс. р. Пусть новая медианная выплата после премирования равна m тыс. р. Это значит, что не менее 12 сотрудников получат в декабре выплату m тыс. рублей или больше. Чтобы сделать m как можно больше, нужно премировать только высокооплачиваемых сотрудников.

Предположим, что $m > 110$. Тогда премию $m - 110$ тыс. р. должны получить те, кто получает 110 тыс. р., премию $m - 90$ тыс. р. должны получить те, кто получает 90 тыс. р., и еще 4 сотрудника с зарплатой 68 тыс. р. должны получить премию $m - 68$ тыс. р. Общая премия равна 300 тыс. р., поэтому

$$2(m-110)+6(m-90)+4(m-68)=300,$$

откуда $12m = 1332$, то есть $m = 111$. Это согласуется с предположением, что $m > 110$. Это и есть наибольшее возможное значение m.