II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 2024. Дистанционный этап. 7 класс. Условия, ответы и решения

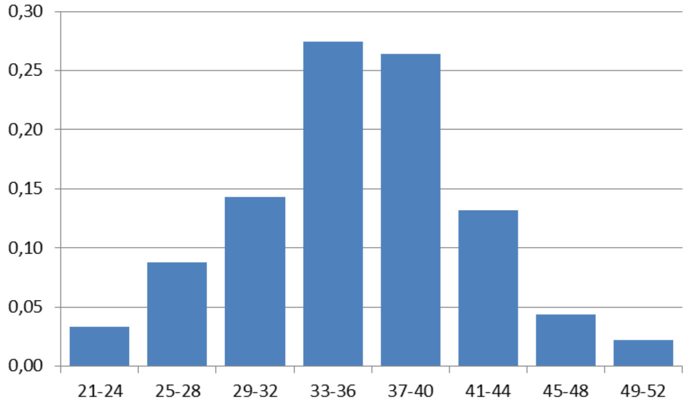
Задача 1. Фишка стоит на числовой прямой в точке 0. Симметричную монету подбрасывают 2000 раз и при каждом броске двигают фишку на единицу вправо, если выпал орёл, или на единицу влево, если выпала решка. Получается случайное блуждание. Размахом блуждания назовём разность между наибольшей и наименьшей координатами фишки за время блуждания. Известно, что выпало ровно 1100 орлов.

Сколько существует различных последовательностей движения фишки, при которых размах блуждания окажется равным 1100?

Ответ: 901.
Решение. Очевидно, 1100 – максимально возможный размах, который получится, если все шаги вправо фишка делает подряд. Первый шаг вправо может быть по счёту первым, вторым и так далее до номера 901 (если фишка делает сначала 900 шагов влево, а потом 1100 шагов вправо). Всего 901 способ.

Задача 2. Футбольные команды «Физик» и «Лирик» играют друг с другом. Вероятность того, что они сыграют вничью, равна 0,1. В этом матче шансы на победу команды «Физик» в два раза выше, чем у команды «Лирик». Найдите вероятность того, что «Физик» выиграет.
Ответ: 0,6.

Задача 3. Чтобы заказать тёплые попонки на зиму, волонтеры в приюте измерили длину тела всех короткошёрстных собак от холки до основания хвоста. На гистограмме показаны частоты сгруппированных значений. По горизонтали отмечается длина тела в сантиметрах.



Оцените (найдите приближённо) медиану величины «*длина тела*» собак из этой выборки.

Ответ: любое значение от 33 до 36.

Задача 4. В юго-восточной части Швамбрании течет река Висбю, которая берёт начало где-то в горах и впадает в океан. В этой части страны расположено пять городов: Плерден, Брандесбург, Лефрон, Броненштадт и Штольн.

Все города показаны на карте, однако они не подписаны, а обозначены цифрами. В таблице даны некоторые общие сведения обо всех пяти городах. Определите, где какой город на карте.

Табл. Города Швамбрании

Город	Площадь, кв. миль	Население, тыс, чел.	Основная статья дохода	Высота центра над уровнем моря, футы	Источник пресной воды
Плерден	14	131	Сувенирная промышленность	136	р. Висбю
Брандесбург	8	28	Изготовление зубных протезов	7	р. Висбю
Лефрон	11	63	Лекарственная промышленность	253	Скважины
Броненштадт	8	14	Овцеводство	482	р. Висбю
Штольн	3	11	Нет доходов	327	р. Висбю

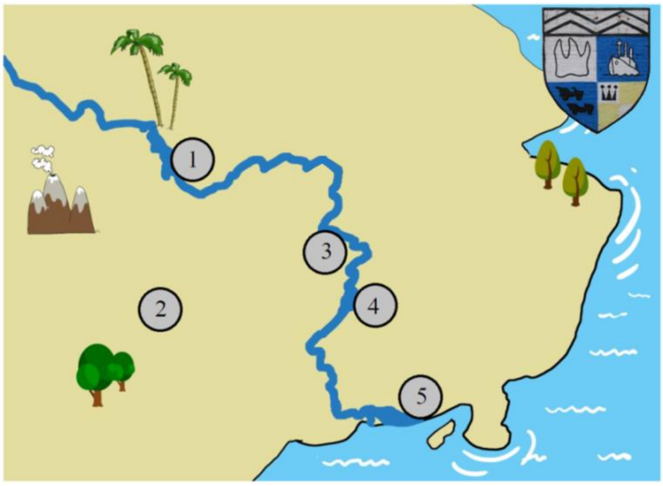
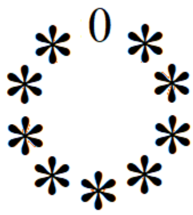


Рис. 1. Карта юго-восточной Швамбрании

Ответ: 1 – Броненштадт, 2 – Лефрон, 3 – Штольн, 4 – Плерден, 5 – Брандесбург.
Решение. Лефрон – единственный из городов, который, а берёт воду в скважинах, а не в реке. Значит, Лефрон имеет номер 2.

Чем ниже город по течению реки, тем меньше высота над уровнем моря. Из всей статистики требуется только величина «*Высота над уровнем моря*».

Задача 5. В вершинах десятиугольника расположены цифра 0 и девять звездочек. Нужно поставить все цифры от 1 до 9 вместо звездочек так, чтобы любые две соседние цифры, включая ноль, отличались на 7 или давали в сумме число, которое делится на 3. Предложите один какой-нибудь вариант. В ответе запишите десять цифр по часовой стрелке подряд, начиная с нуля.



Ответ. Любой из следующих вариантов:

0369245187, 0369248157, 0369215487, 0369218457,
0639245187, 0639248157, 0639215487 и 0639218457.

Все они получаются друг из друга перестановками цифр внутри пар (3, 6), (1, 4) и (5, 8).
Решение. Решение можно найти следующим образом: нарисовать граф, вершины которого – цифры от 0 до 9 и две цифры связаны ребром, только если выполняются условия, а затем выбрать в этом графе цикл, проходящий через все вершины (*гамильтонов цикл*).

Задача 6. Квантик и Ноутик по очереди записывают числа: Квантик на доске, Ноутик в тетрадке. Как только Квантик пишет число, Ноутик ищет медиану* всех записанных на доске чисел и заносит её к себе в тетрадку. В ней оказались записаны числа 2, 4, 6, 5. Какое число Квантик написал на доске четвёртым по счёту?

*Если в наборе чётное количество чисел, то Ноутик находит медиану как среднее арифметическое двух средних по величине.

Ответ: 4.
Решение. Первое число равно 2. Чтобы медиана первых двух чисел была равна 4, второе число должно быть равно 6. Обозначим третье число x:

$$2\ \ 6\ \ x.$$

Медиана теперь равна 6, а это может быть, только если $x \geq 6$. Добавим последнее число:

$$2,\ 6,\ x \geq 6,\ y.$$

Если $y \geq 6$, то медиана полученного набора тоже не меньше чем 6. Но она равна 5. Следовательно, $y < 6$. Если $y \leq 2$, то медиана будет равна 4. Значит, $2 < y < 6$. В этом случае медиана равна $\frac{y+6}{2}$. Из уравнения $\frac{y+6}{2} = 5$ находим, что $y = 4$.

Задача 7. На полке стоят разноцветные книги. Аня спрашивает старшего брата:

– Если я возьму случайную книгу с полки, то какого цвета книга мне, скорее всего, попадется?

– Красного, – отвечает брат.

– Значит, если я возьму случайную книгу, то мне попадется, скорее всего, красная?

– Нет, скорее всего, тебе попадется не красная.

В обоих случаях брат прав. Какое наименьшее количество книг может быть на полке?

Ответ: 5.
Решение. На полке должно быть больше красных книг, чем книг любого другого цвета, но не красных книг вместе должно быть больше, чем красных. Минимальное количество цветов – 3 (пусть, кроме красных еще зелёные и синие). Тогда красных книг должно быть 3, а синих и зелёных по две. Всего 7.
Если цветов 4, то красных может быть две, а трех прочих цветов – по одной. Всего пять.
Если цветов больше четырех, то меньше 5 книг быть не может.

Задача 8. В некоторой стране 10 городов. Каждый город соединен с другими городами ровно тремя грунтовыми дорогами, причем каждая дорога соединяет два различных города. Король повелел асфальтировать все дороги. На асфальтирование каждой дороги уходит ровно один день. Рано утром бригада дорожников начала асфальтировать какую-то дорогу от какого-то города, дошла до следующего города, асфальтировала выходящую из него дорогу, и работала таким образом, пока не попала в город, откуда выходят только асфальтированные дороги. Какое наибольшее количество дней бригада могла потратить на такой рабочий маршрут?

Ответ: 11.
Решение. Вся сеть ребер графа разбивается в 5 независимых цепей, каждая из которых является эйлеровым путем какого-то подграфа. Бригада проходит только одну из цепей. Значит, она не пройдет минимум 4 цепи, то есть минимум 4 ребра. Следовательно, пройдет максимум $15-4=11$ ребер. Пример строится легко.

Задача 9. Числовой набор обладает следующим свойством: если к нему добавить некоторое число, то среднее арифметическое набора уменьшится на 4, а если это же число добавить ещё раз, то среднее арифметическое уменьшится ещё на 3. Сколько чисел может быть в таком наборе?

Ответ: 6.
Решение. Пусть в наборе n чисел, их среднее равно $\overline{x}$, а добавляется число a. Тогда

$$\bar{x} - 4 = \frac{\bar{x}n + a}{n+1} \text{ и } \bar{x} - 7 = \frac{\bar{x}n + 2a}{n+2}.$$

Из этих уравнений получаем:

$$\bar{x} - 4n - 4 = a \text{ и } 2\bar{x} - 7n - 14 = 2a.$$

Умножим первое уравнение почленно на -2 и сложим со вторым: $n - 6 = 0$, откуда $n = 6$.