Урок 58. Игральная кость в теории вероятностей

Примерный сценарий урока по теме «Игральная кость в теории вероятностей». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Цель урока — формирование представлений у учащихся о роли игральной кости в теории вероятностей. У учащихся должно сложиться представление о разнице между настоящими и математическими игральными костями.

Оборудование: калькулятор.

Игральная кость

Игральная кость, как и монета, служит прекрасным средством для получения равновозможных случайных событий.

Правильные (симметричные) кости обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. Для этого все грани должны иметь одинаковую площадь, быть плоскими и гладкими. Вершины и ребра должны иметь одинаковую форму. Если они скруглены, то все скругления должны быть одинаковыми. Отверстия, маркирующие очки на гранях, должны быть просверлены на одинаковую глубину. Обычная игральная кость — кубик. У правильного игрального кубика суммы очков на противоположных гранях одинаковы[2] и равны 7.

Рис. 1 Игральная кость

[1] Математика 7 – 9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

[2] Если суммы не одинаковы, то искусный игрок может раз за разом бросать кубик так, что обеспечит себе перевес в длительной игре. Требование о равных суммах на противоположных гранях появилось как способ избежать этого вида жульничества в игре.

История игры в кости

Рис. 2 Древние игральные кубики

Рис. 3 «Бабки» из таранной кости овцы

Игра в кости — одна из древнейших. Первые прообразы игральных костей найдены в Фивах в Египте и датируются XX веком до нашей эры. Первоначально кости служили орудием для гаданий. В древности результат броска костей также считался изъявлением воли богов.

Название «кость» в русском языке происходит от того, что в древности на Руси игральные кубики часто вырезали из суставов копытных животных. Об играх с костями животных (игры в лодыжки, бабки, костыги, козули) свидетельствуют многочисленные археологические находки на обширной территории.

Игры с костями с глубокой древности известны в Индии, Китае, Лидии[3], Греции и Риме. Встречались очень дорогие кости — из слоновой кости, агата, янтаря, оникса, серебра и золота. В Древней Греции считалось, что игральные кости придумал Паламед во время Троянской войны. По версии же философа Геродота, кости изобрели лидийцы, чтобы отвлечься от голода, болезней и других напастей.

Рис. 4 Изображение игры в кости. Древняя Греция

В Древнем Риме кости, вероятно, пришедшие из Древней Греции, быстро приобрели популярность. В кости играли все, от рабов до императоров. В средние века игра в кости стала очень популярной в Европе.

[3] Лидия — древнее государство в западной части Малой Азии

Рис. 5 «Крестьяне, играющие в кости»,1640, Давид Тенирс Младший

Кости периодически запрещались. В III веке до н.э. в Риме игра в кости разрешалась только во время ежегодного празднования сатурналий[4]. В Древнем Китае за игру в кости можно было попасть на каторгу.

В средние века кости время от времени запрещались церковью, поскольку, по мнению духовенства, игра в кости была порождением дьявола. Игрок при этом якобы становился слугой дьявола, распространяя зло.

Но бывали периоды, когда кости разрешались, и игра в них поощрялась. Французский епископ Виболд даже приписал каждому сочетанию очков, выпавших на трех костях, некоторую христианскую добродетель[5]. Такие крайности свидетельствуют о том, что изжить их церковь не смогла, поэтому пыталась использовать страсть к игре в своих целях.

В эпоху ренессанса увлечение костями пошло на спад, а сейчас игры в кости не очень распространены. На сегодняшний день самая популярная игра в кости — крэпс. Кроме того, кости разной формы используются в настольных играх.

Рис. 6 Игра в крэпс в военном лагере, 1918

Рис. 7 Пластиковые кости

[4] Сатурналии — декабрьский праздник в честь бога Сатурна

[5] Виболд ввел в обиход игру в кости под названием «Добродетели». Например, комбинация $(1,1,1)$ означает любовь, а $(2,1,1)$ — непогрешимость веры и т.д. Монах, выбросив на трёх костях некоторую «добродетель», получал право наставлять в этой добродетели других монахов.

Игральная кость и вероятность

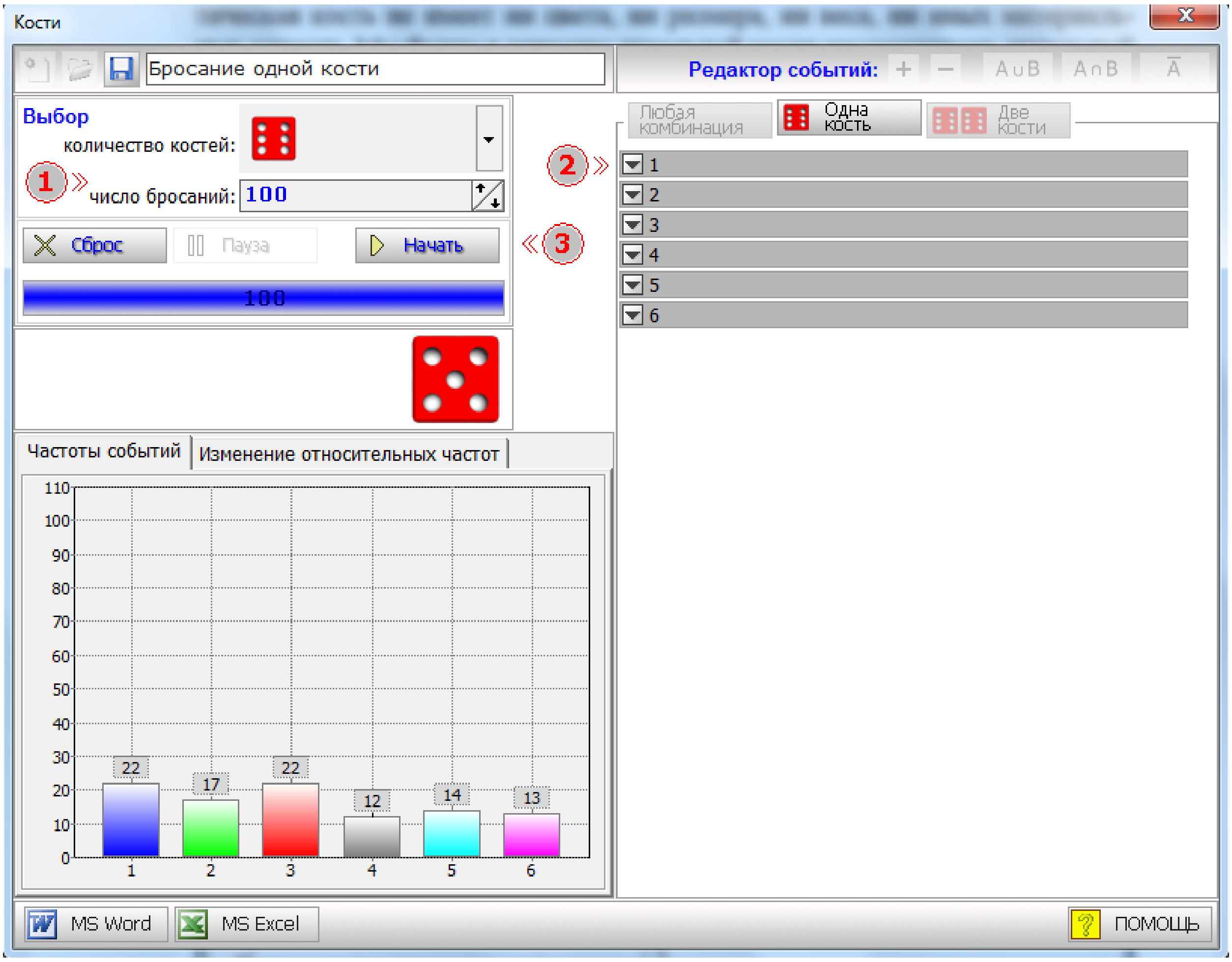
Математическая кость — это математическая модель игрального кубика. Все шесть граней равновозможны. Подобно математической монете, математическая кость не имеет ни цвета, ни размера, ни веса, ни иных материальных качеств.

Важно! Нельзя доказать, что вероятность выпадения каждой грани кубика равны 1/6. Мы сами назначаем эти вероятности, опираясь на симметрию кубика.

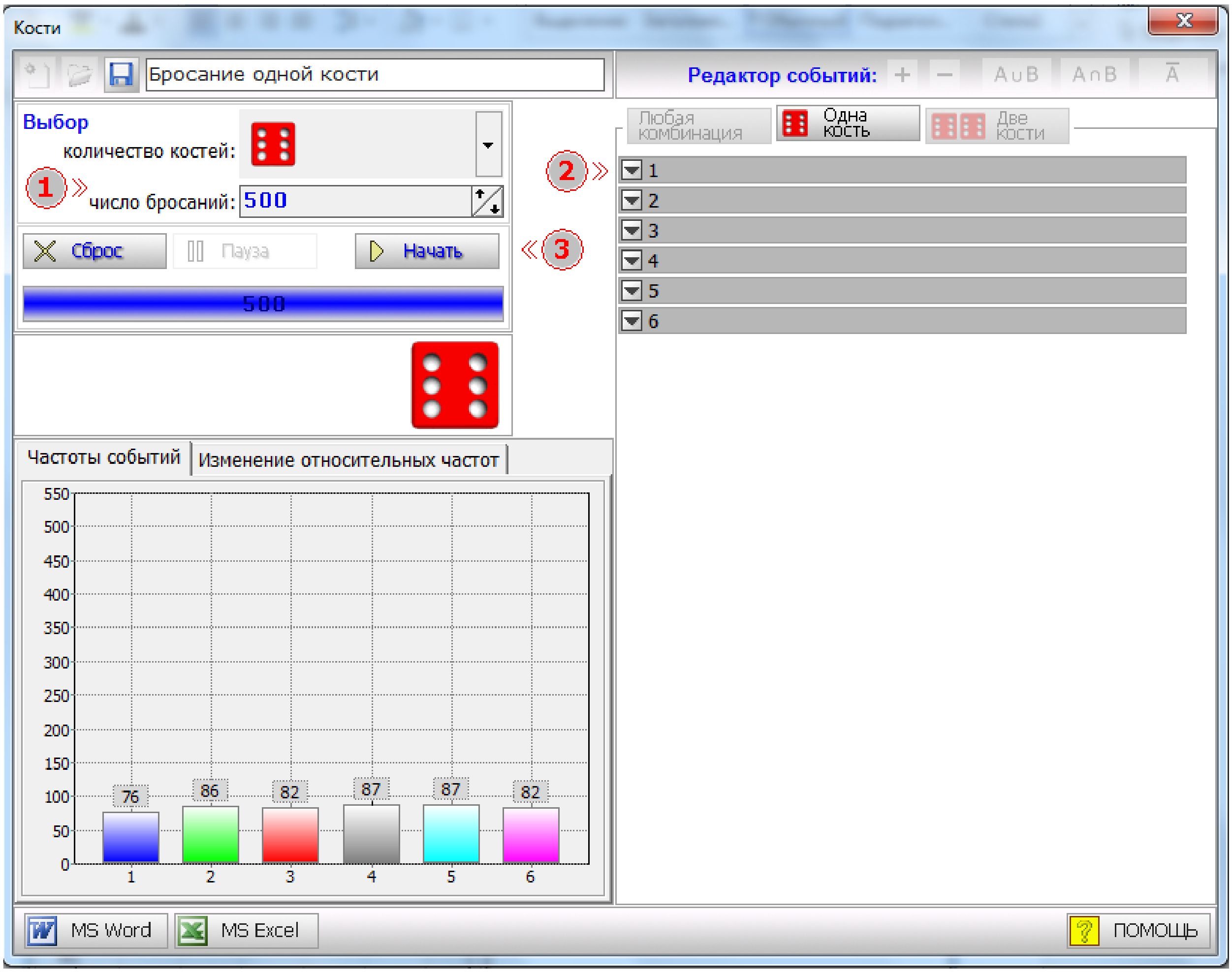
Равные шансы выпадения каждой грани подтверждаются экспериментально. Для проведения эксперимента на уроке воспользуйтесь интерактивным модулем «Игральные кости» (http://ptlab.mccme.ru/node/187).

Запустите модуль на бросок одного кубика. Сначала поставьте 100 бросков, потом увеличивайте их количество. Обсудите со школьниками результаты эксперимента.

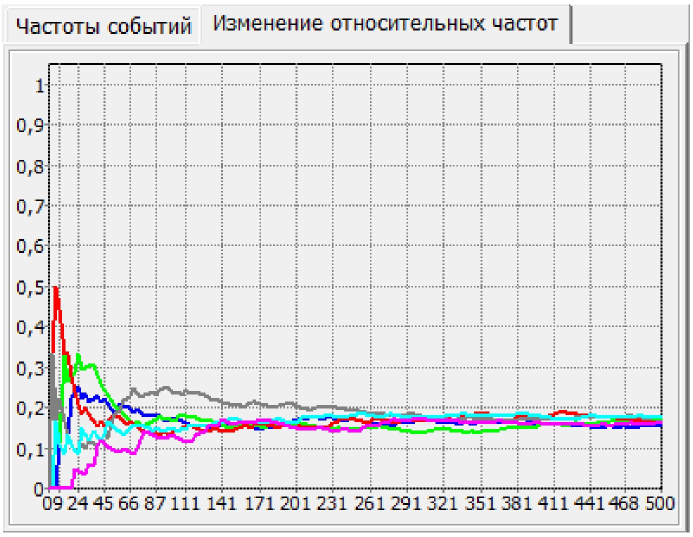
Пример обсуждения. При 100 бросках частоты выпадения граней могут существенно отличаться.



При 500 бросках частоты выпадения граней уже ближе друг к другу. Высоты столбиков постепенно выравниваются.

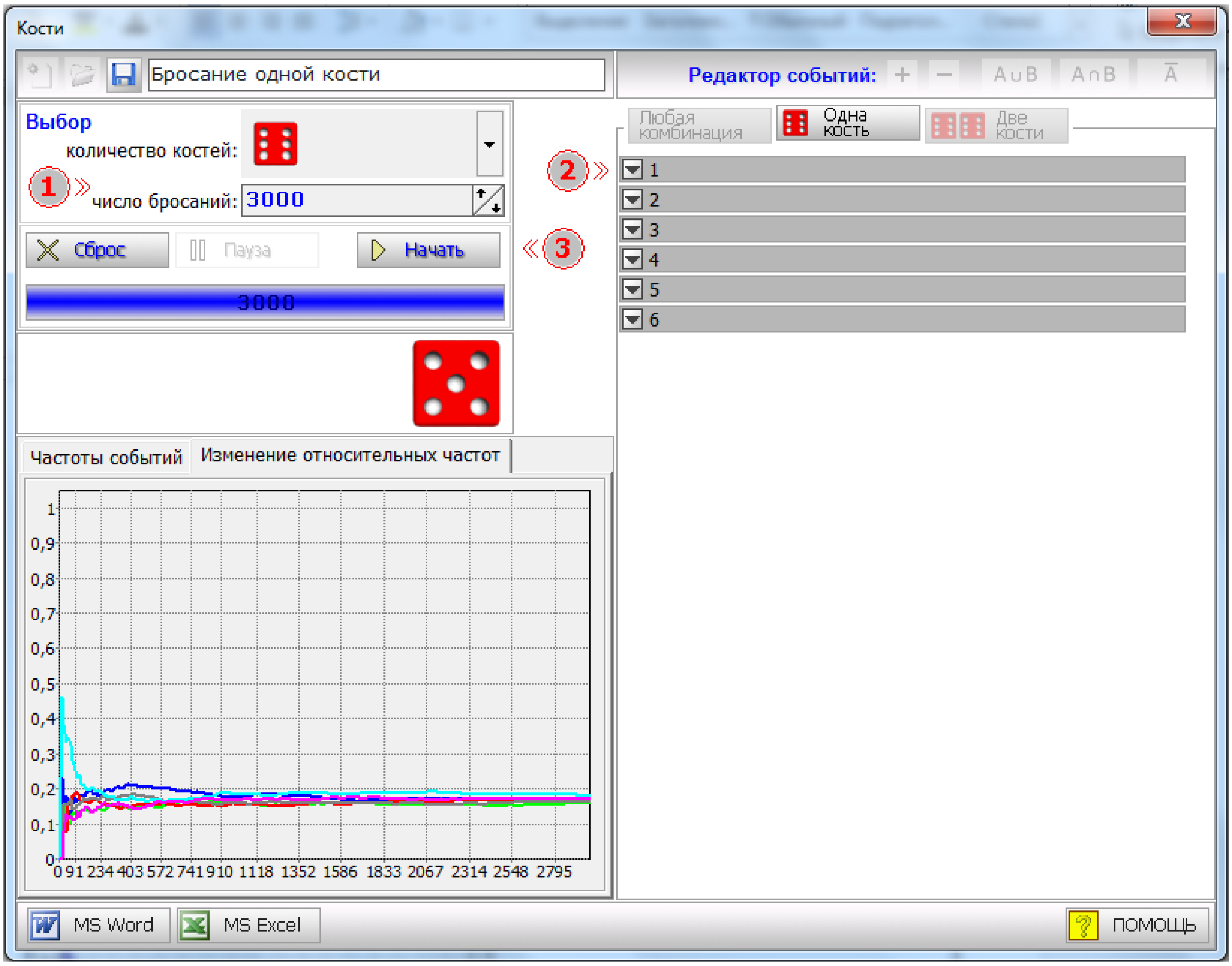


Это же явление хорошо видно на графике частот[6]. С увеличением количества бросков графики частот выпадения каждой грани приближаются к прямой $y = 1/6$.

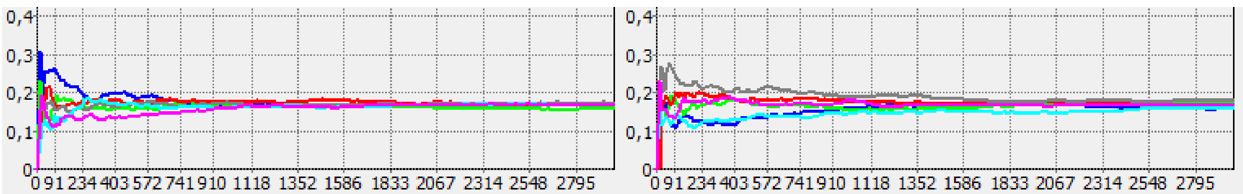


[6] График строится во вкладке «Изменение относительных частот».

Настройте модуль на большее число бросков (например, 3000). Проведите эксперимент несколько раз и сравните получающиеся графики.



Обратите внимание: вначале частоты сильно отличаются друг от друга, но тенденция всегда одна — колебания затухают, и кривые стремятся к прямой $y = 1/6$.



Несколько бросков кости

Одна из первых исторически известных задач про кости — подсчет числа различных исходов при бросании нескольких костей (или при бросании одной кости несколько раз, что то же самое).

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Рис. 8 Таблица эксперимента с суммами выпавших очков

Две кости. При бросании двух костей сумма очков может принимать значения от 2 до 12 — всего одиннадцать значений. Означает ли это, что выпадение каждой из этих сумм равновероятно? Не будем повторять ошибку Даламбера. Как и в случае с монетами, будем различать кубики: представим, что один из них синий, а другой — зеленый. Каждый кубик в силу симметрии может с равными шансами выпасть любой из шести граней вверх. Составим таблицу, в которой номер столбца — число, выпавшее на синем кубике, а номер строки — на зеленом. Всего вариантов 36. Каждой ячейке соответствует одно из 36 равновозможных элементарных событий в опыте с бросанием двух костей. Впишем в каждую ячейку сумму очков при каждом возможном исходе (см. рис.8).

Из симметрии кубика следует, что все элементарные события равновозможны. В таблице видно, что разные суммы встречаются с разной частотой. Составим таблицу частот для каждой возможной суммы.

Таблица 1. Вероятности различных сумм

Сумма	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Вероят-ность	1/36	2/36	3/36	4/369	5/36	6/36	5/36	4/936	3/36	2/36	1/36
Дес.округл.	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028

Получается, что больше всего шансов у суммы 7; чем сильнее сумма отличается от 7, тем меньше шансов её получить.

С помощью модуля «Игральные кости» бросьте пару костей 500 и 6000 раз (см. рис. 9) и сравните получившиеся результаты с вероятностями из таблицы 1.

Табл.2 Возможные результаты эксперимента

Сумма	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Частота (500 бросков)	0,024	0,036	0,084	0,072	0,144	0,182	0,158	0,106	0,090	0,064	0,040
Частота (6000 бросков)	0,028	0,059	0,083	0,110	0,138	0,157	0,139	0,112	0,091	0,058	0,025
Вероятность	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028

Из таблицы 2 (эксперимент, который провели мы) видно, что при 6000 бросках частоты оказались ближе к вероятностям, чем при 500 бросках.

С таких наблюдений началось становление теории вероятностей.

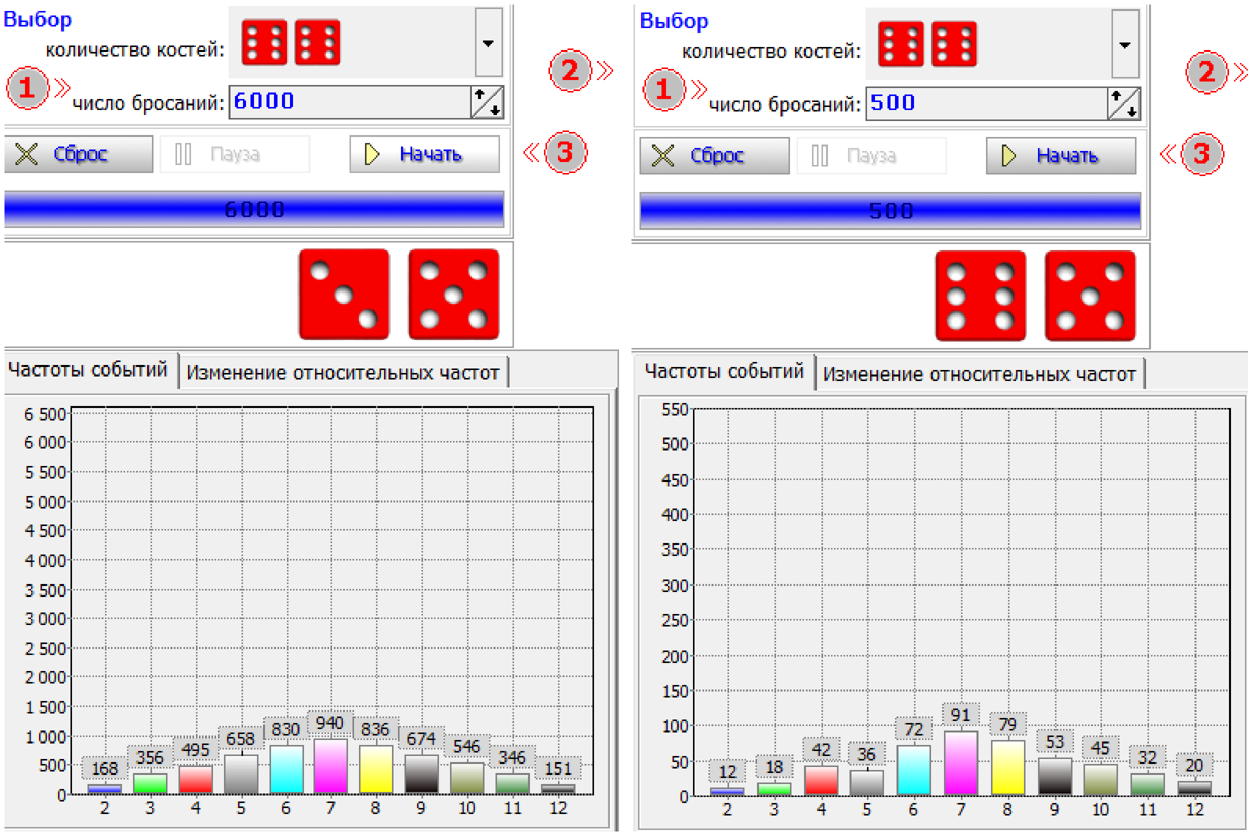


Рис.9 Результаты эксперимента с 500 и 6000 бросками

Три кости. Мы уже знаем, что в опыте с двумя костями всего 36 равновозможных элементарных исходов. В 1477 г. в Венеции Бенвенуто д'Имола издал «Божественную комедию» Данте со своими примечаниями. В VI песни «Чистилища» упоминается игра, в которой одновременно бросают три кости:

Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости...

Задача. Сколько всего равновозможных элементарных исходов в опыте с бросанием трех костей, если считать, что кости различны?

Решение. Пронумеруем кости. Первая и вторая кость могут дать нам всего 36 вариантов. При этом третья кость может дать 6 различных вариантов. Удобно сделать небольшую табличку.

Количество комбинаций очков на 1-й и 2-й костях	36	36	36	36	36	36
Число очков на 3-ей кости	1	2	3	4	5	6

Значит, общее число комбинаций равно

$$36+36+36+36+36+36=36\cdot 6=216.$$

Более простой способ подсчета: 6 разных очков на первой кости любым образом сочетаются с 6 разными очками на второй и с 6 разными очками на третьей. Получается $6\cdot 6\cdot 6=6^3=216$.

В комментариях к «Божественной комедии» Д'Имола подсчитывает число возможных комбинаций при бросании трех костей и пишет, что всего их 56. Такой же результат был получен уже упомянутым епископом Виболдом. Почему же мы получили 216, а уважаемые люди в средневековье — только 56? Причина в том, что они не различали кости между собой. Они не видели разницы между исходами $(3,2,6)$ и $(6,3,2)$, поскольку бросали одинаковые кости одновременно. Так можно поступать, но в этом случае разные исходы нельзя считать равновозможными[7]. Гораздо удобнее считать, что кости различны, всего исходов 216, но зато они все имеют равные шансы.

Итоги урока. В теории вероятностей кость — мыслимое устройство, которое позволяет получать натуральные числа от 1 до 6 с одинаковыми вероятностями, равными 1/6. Удобно представлять кость в виде обычного симметричного игрального кубика. Опыт, где бросают две кости, имеет 36 равновозможных исходов в силу симметрии всех комбинаций.

Если бросают три кости, то возникает $6^3=216$ равновозможных исходов. Говоря о бросании кости, мы будем всегда иметь в виду, что кость симметрична (если не сказано иное). Говоря о бросании двух костей, мы всегда будем иметь в виду, что кости различны — это то же самое, что бросать одну кость два раза.

Игры в кости послужили отправной точкой в изучении вероятностей. Можно сказать, что игральная кость — родоначальница современной теории вероятностей, которая сейчас шагнула далеко за рамки игровых задач. Тем не менее, монеты и кости до сих пор используются не только для обучения, но и в моделировании сложных, серьезных и ответственных экспериментов.

Рекомендуемое домашнее задание: см. Приложение

[7] Иначе мы допустим ошибку Даламбера.

Приложение

Домашнее задание

1. Симметричную кость бросают дважды. Отметьте в таблице эксперимента события «хотя бы один раз выпала единица» и «оба раза выпало число больше трех». Сравните вероятности этих событий.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Игральную кость бросают дважды. Известно, что на второй кости выпало больше трех очков. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна семи.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

3. Найдите вероятность события

а) «сумма очков равна 3»;

б) «сумма очков равна 4» при бросании трех симметричных костей.

4. Убедитесь, что Виболд и д'Имола были правы: если не различать три кости между собой, то всего существует 56 комбинаций очков.