МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 57. Монета в теории вероятностей

Примерный сценарий урока по теме «Монета в теории вероятностей». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Цель урока — формирование представлений у учащихся о роли монеты в теории вероятностей. У учащихся должно сложиться представление о разнице между настоящей и математической монетой, а также понимание того, что вероятности выпадения орла и решки равны в силу нашего предположения.

Симметричная монета

Иногда приходится полагаться на случай. До сих пор распространен обычный жребий – орёл или решка.

Каждый из нас держал в руках монету. На одной стороне (аверсе) российских монет изображен герб Российского государства — двуглавый орёл (впервые орёл на монетах появился при Иване III в конце XV в.). Рисунок на другой стороне (реверсе) в 18–19 веках напоминал решётку[2], на фоне которой был отчеканен номинал монеты (её достоинство). Поэтому в России стороны монеты традиционно называют «орёл» и «решка».

Математическая монета, используемая в теории вероятностей, лишена многих качеств настоящей монеты. Настоящая монета служит иллюстрацией. У математической монеты нет цвета, размера, веса и достоинства. Она не сделана ни из какого материала и не может служить платежным средством. Монету бросают, и она падает либо орлом, либо решкой вверх. Математическая монета считается симметричной. Это означает, что при броске она имеет равные шансы выпасть

[1] Математика 7 – 9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

[2] Отпечаток решётки получался сам по себе: чтобы заготовка монеты не скользила, на поверхности наковальни делали насечки, которые отпечатывались на монете при изготовлении.

орлом или решкой. При этом подразумевается, что иные исходы невозможны — монета не может потеряться или «встать на ребро». Настоящая монета может иметь дефекты, которые влияют на результат броска (например, быть немного вогнутой). У математической монеты дефектов нет. Тем не менее, чтобы провести на практике опыты с математической монетой, мы бросали, бросаем и будем бросать обычную монету.

Жребий «орёл – решка» в повседневной жизни

Пример 1. Монетой иногда пользуются для принятия решения в случае, когда нет предпочтений. Например, перед началом футбольного матча судья подкидывает монетку и таким образом определяет, какая из команд введёт мяч в игру. А прежде так поступали, чтобы определить победителя, если матч заканчивался вничью. Один из самых известных случаев произошел в финальном матче чемпионата Европы 1968 года по футболу между командами Италии и СССР. Матч завершился вничью 0:0, а жребий оказался на стороне итальянцев. Больше в истории большого футбола такого не случалось. В настоящее время для определения победителя после ничьей применяются послематчевые пенальти.

Пример 2. Орлянка – старинная игра, распространенная во многих странах. Игра проста: один игрок бросает монету, второй загадывает, какой стороной вверх она упадет. Угадал – выиграл; нет – проиграл.

Рис. 1 К.Г.Г.Гейслер, "Орёл или решка", из альбома "Игры и забавы русских низких сословий"

Пример 3. В пьесе А.Н.Островского "Бесприданница" купцы Кнуров и Вожеватов с помощью игры в орлянку решают, с кем поедет в Париж Лариса Огудалова.

> **ВОЖЕВАТОВ.** Да вот, лучше всего. (*Вынимает из кармана монету и кладет под руку.)* Орёл или решётка?
> **КНУРОВ** *(в раздумье)*. Если скажу: орёл, так проиграю; орёл, конечно, вы. *(Решительно)* Решётка.
> **ВОЖЕВАТОВ** *(поднимая руку)*. Ваше. Значит, мне одному в Париж ехать. Я не в убытке; расходов меньше.

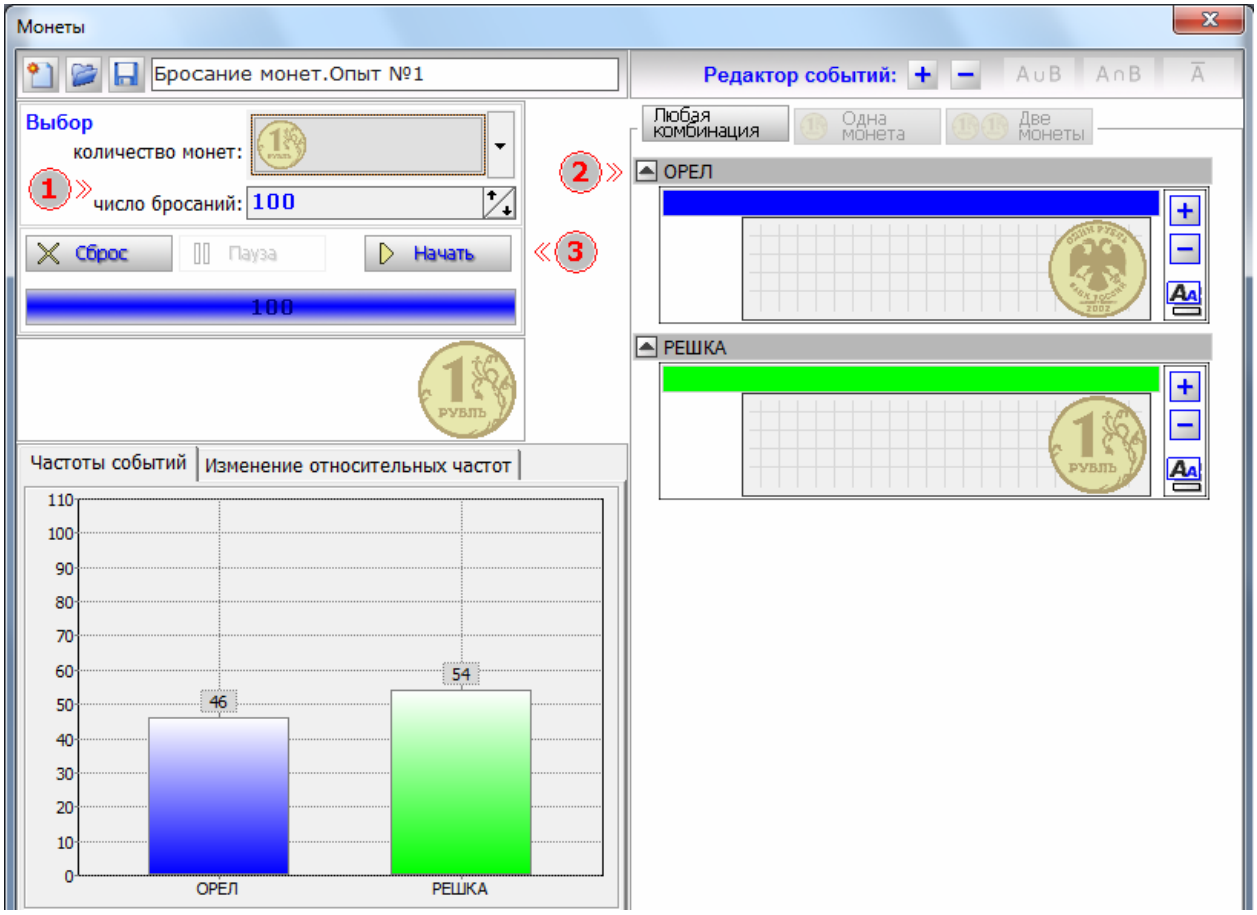
Монета и вероятность

Важно! Нельзя доказать, что вероятности орла и решки равны 1/2. Мы сами назначаем эти вероятности, опираясь на симметрию монеты.

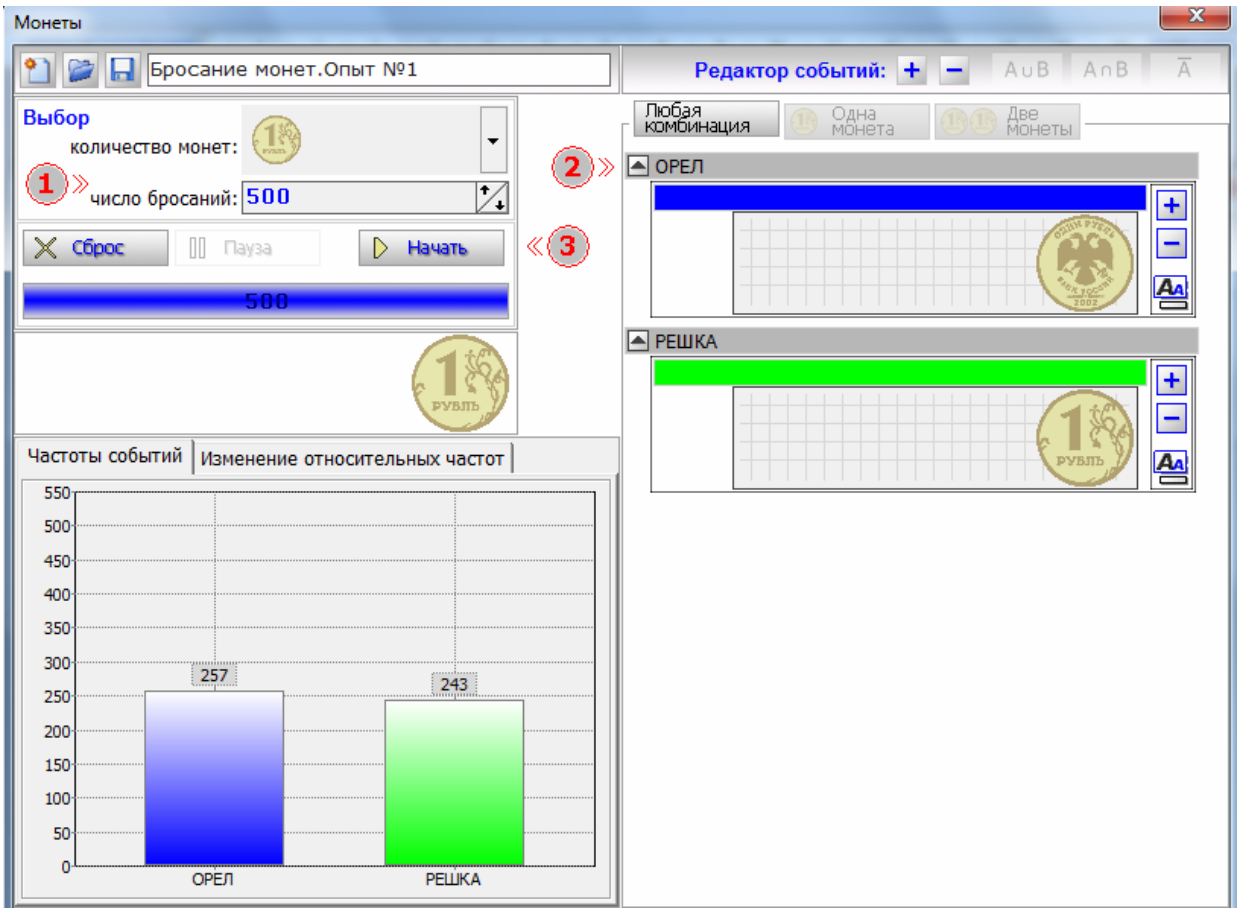
Равные шансы орла и решки подтверждаются экспериментально, если монета симметрична. Для проведения эксперимента на уроке воспользуйтесь интерактивным модулем «Монеты» (ссылка http://ptlab.mccme.ru/node/187).

Запустите модуль сначала на 100 бросков, потом увеличивайте их количество. Обсудите со школьниками результаты эксперимента. Мы тоже провели такой эксперимент.

Пример обсуждения на результатах проведенного нами эксперимента. При 100 бросках количества выпавших орлов и решек незначительно отличаются. Частоты 0,46 и 0,54 близки.

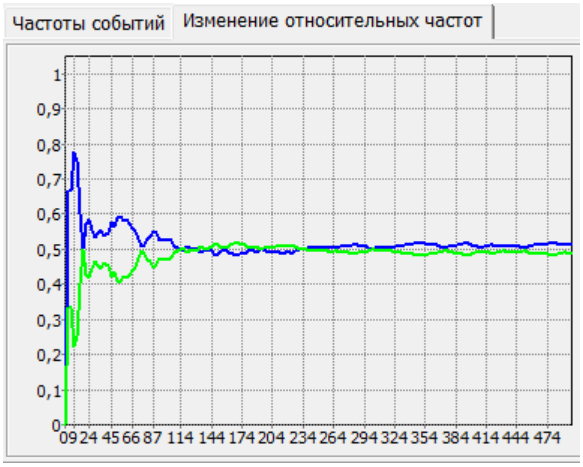


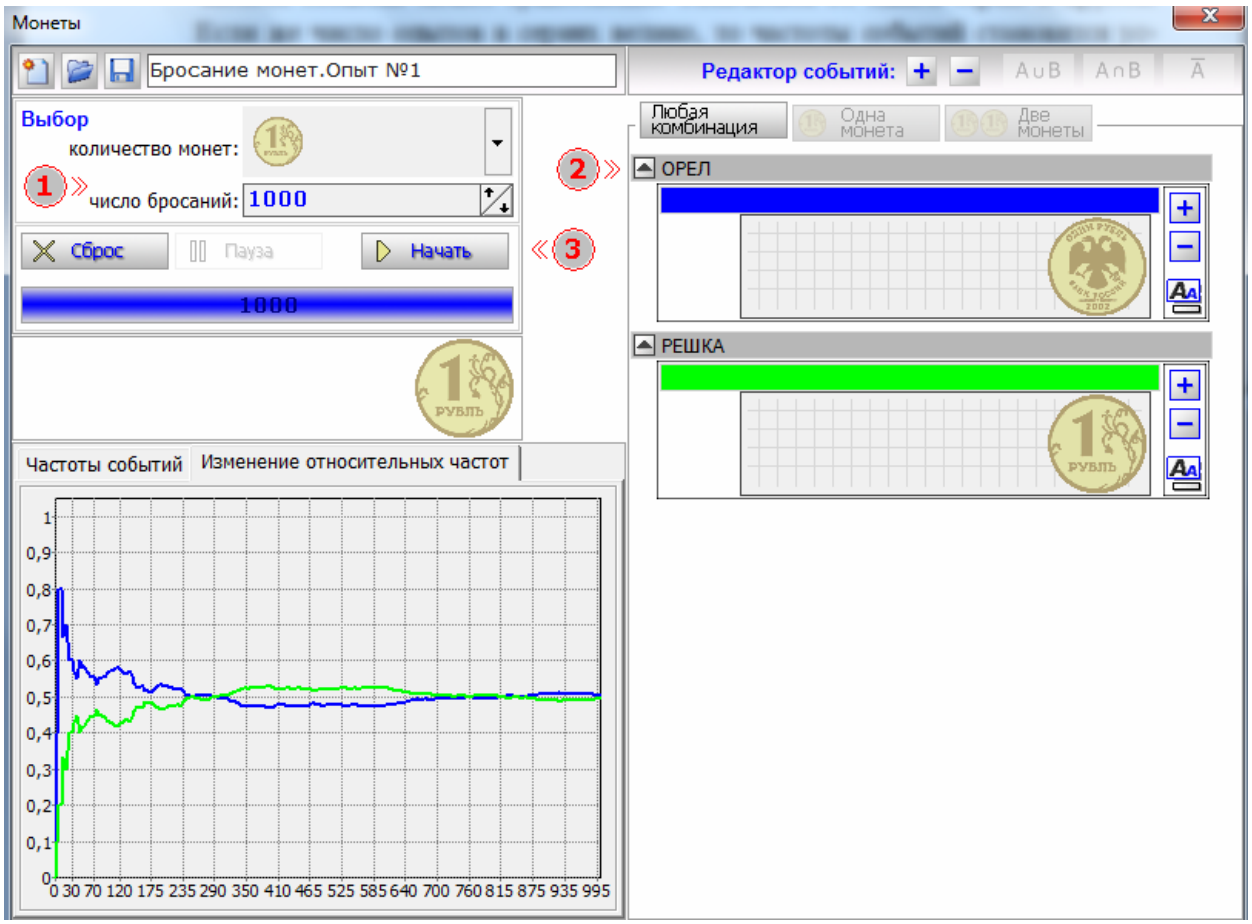
При 500 бросках — результат похожий. Получились частоты 0,514 и 0,486. Обратите внимание учеников на процесс подсчёта. Если наблюдать за столбиками, то их высота иногда может становиться одинаковой, значит, частоты орла и решки в какие-то моменты равны.

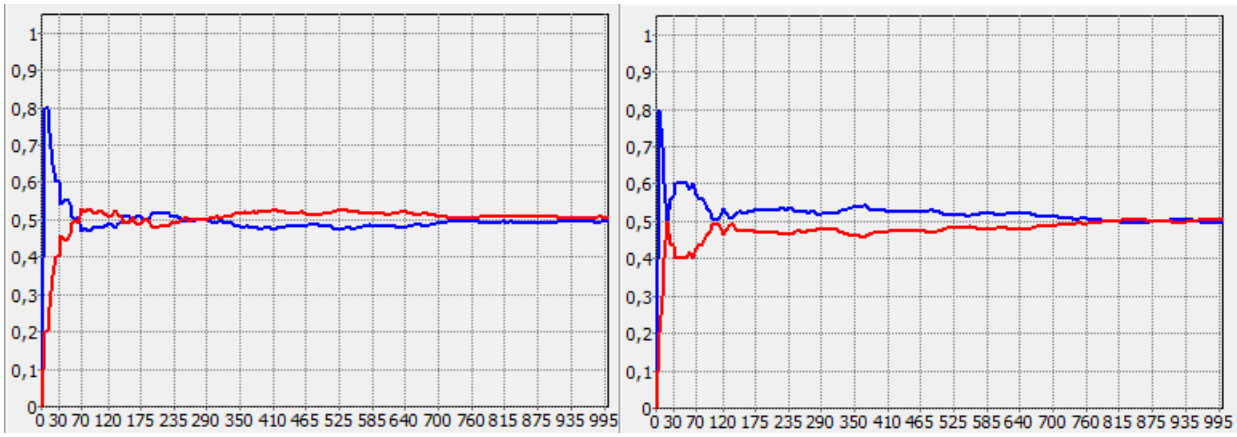


Если после каждого броска подсчитывать частоты выпадения орла и решки, то изменение частот с увеличением количества бросков можно видеть на графике. В интерактивном модуле график эксперимента открывается в закладке «Изменение относительных частот». Обсудите с учащимися график.

Выполните в модуле несколько серий по 1000 бросков и сравните получившиеся графики частот. Вначале частоты могут сильно отличаться друг от друга, но при увеличении количества бросков частоты приближаются к 0,5. Учащиеся наглядно убеждаются в том, что этот результат — не случайность, а закономерность.







Эта закономерность уже обсуждалась ранее (см. 55 урок): при небольшом числе опытов частота события может существенно отличаться от одной серии к другой. Если же число опытов в сериях велико, то частота события становится устойчивее и постепенно приближается к его вероятности. Так в опыте с монетой проявляется *закон больших чисел*.

Двукратное бросание монеты

Рассмотрим более сложную задачу.

Задача. В случайном опыте бросают две монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла?

Французский ученый Жан Лерон Даламбер[3] вошел в историю теории вероятностей из-за своей печально знаменитой ошибки в решении этой задачи[4]. По его мнению, вероятность выпадения двух орлов равнялась $1/3$, так как возможны три исхода: «два орла», «две решки» и «две разные стороны».

Обсудите с учащимися, в чём, по их мнению, состоит *ошибка Даламбера*. Обсуждение должно привести к тому, что эти три исхода неравновозможны, а поэтому их вероятности не равны $1/3$. Чтобы разобраться, пронумеруем монеты. Пусть у нас будут первая монета и вторая.

Решение задачи. Поскольку монеты различны, мы получаем четыре возможных исхода:

ОО, ОР, РО и РР.

Предположим, что первая монета упала орлом вверх. Тогда вторая монета с равными шансами падает вверх орлом или решкой. Поэтому исходы

ОО и ОР

имеют равные шансы.

Аналогично, если первая монета упала вверх решкой, то из-за симметрии второй монеты исходы

РО и РР

имеют равные шансы.

Теперь представим, что, бросая первую монету, мы закрыли глаза и не видели, что выпало на ней, но увидели, что на второй монете выпал орёл. Но ведь и первая монета тоже симметрична, поэтому два возможных исхода

ОО и РО

тоже имеют равные шансы.

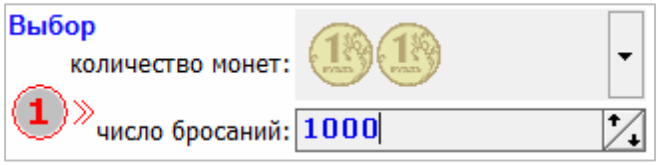
Получается, что все четыре элементарных события имеют равные шансы, если обе монеты симметричны. Единичная вероятность поровну распределяется между четырьмя исходами, и вероятность каждого из них равна 1/4.

---

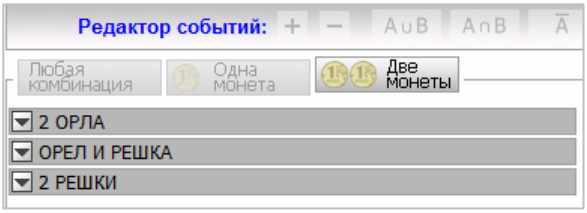
[3] Ученый-энциклопедист, живший в XVIII веке. Широко известен как философ, математик и механик.

[4] Подсчет вероятностей при игре в орлянку содержался в статье «Герб и решётка» (Croix at pile), опубликованной в 1754 году.

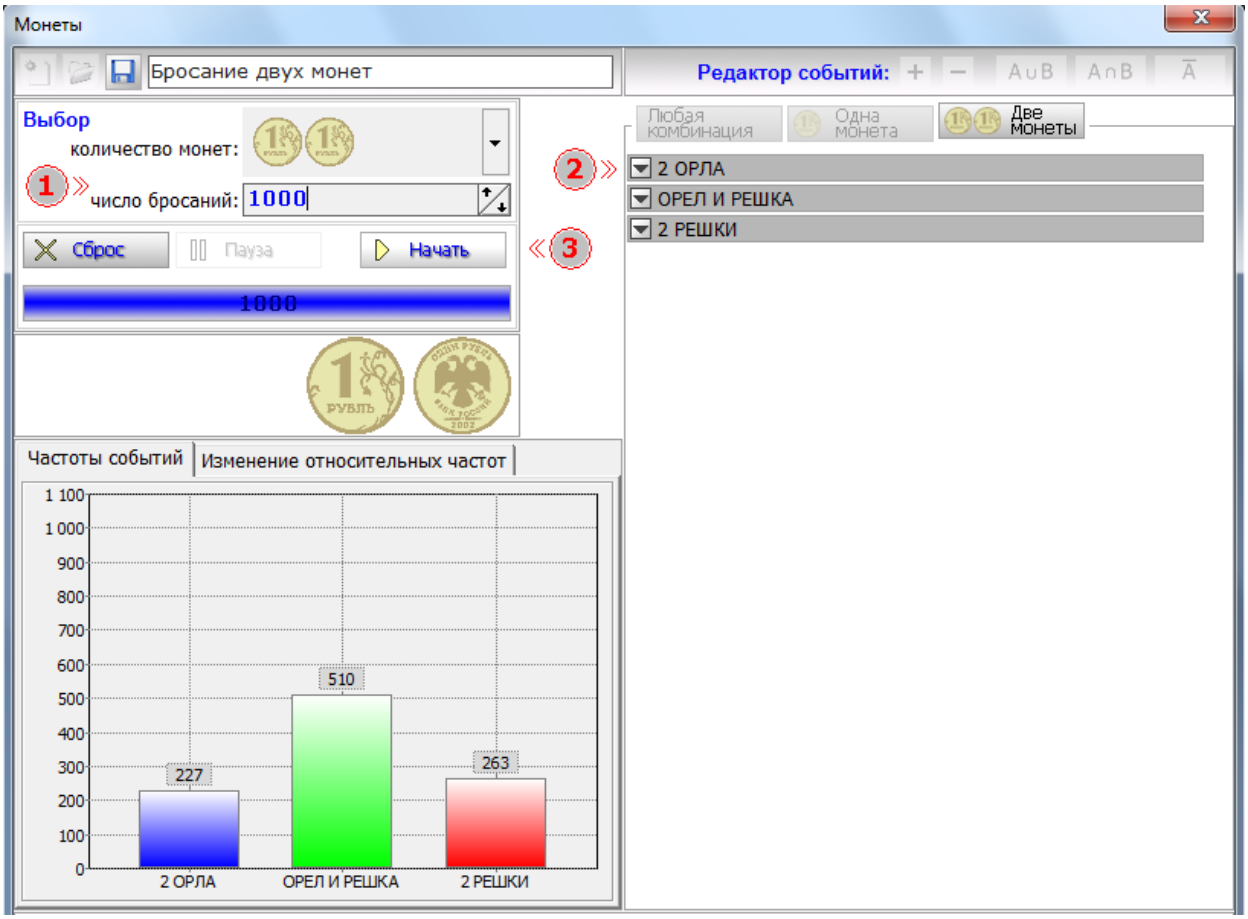
Желательное обсуждение. Обсудите с учащимися следующие вопросы. Зависят ли шансы исходов от того, одинакового ли размера или веса монеты? Зависят ли шансы исходов от того, бросают ли монеты одновременно или по очереди?



Чтобы проверить предположения и выводы экспериментально, предложите ученикам провести эксперимент в модуле «Монеты». Выберите в меню две монеты и введите число бросаний (например, 1000).



Затем в редакторе событий выберите закладку «Две монеты» и проведите эксперимент несколько раз.



Из раза в раз частота выпадения двух орлов окажется близка к $1/4$, а не к $1/3$.

Выводы. Монета в теории вероятностей — важный инструмент, с помощью которого можно получать два равновозможных исхода. Такие опыты с двумя исходами мы будем называть испытаниями. При двукратном бросании монеты получаются 4 равновозможных исхода, при трёхкратном — 8 равновозможных исходов и так далее.

Монета — простейшая вероятностная модель. На опытах с монетами легко и удобно учиться теории вероятностей. Но это не единственная польза от математических монет: с их помощью можно моделировать довольно сложные и ответственные эксперименты.

Бросая монету многократно и наблюдая за формированием графика частот, мы видели, что частоты иногда чуть быстрее, а иногда чуть медленнее приближаются к значению 0,5. Так мы впервые увидели проявление фундаментального закона природы — *закона больших чисел*. Этот закон обеспечивает стабильность и устойчивость массовых явлений. Для бросания монеты и события «выпал орёл» закон больших чисел можно сформулировать так:

«при большом числе бросаний монеты частота выпадения орла, скорее всего, колеблется все меньше и меньше, приближаясь к числу 0,5».

Рекомендуемое домашнее задание: см. Приложение

Приложение

Домашнее задание

1. Задача: В случайном опыте симметричную монету бросают три раза. Какова вероятность события «выпадут три решки»? Два школьника дали два решения.

> **Решение 1**. При бросании трех монет может произойти четыре события: «одна решка», «две решки», «три решки» и «нет решек». Поэтому вероятность выпадения трех решек равна 1/4.
>
> **Решение 2**. Рассмотрим все варианты:
>
> 1) Если при первом броске выпал орёл, то второй и третий броски делать незачем (нужное событие не случилось).
>
> 2) Если при первом броске выпала решка, а при втором — орёл, то нужное событие не случилось.
>
> 3) Если два раза выпала решка, а третий раз — орёл, то нужное событие не случилось.
>
> 4) Все три раза выпала решка — нужное событие случилось.
>
> Получилось всего четыре варианта, поэтому вероятность трех решек равна 1/4.

Обдумайте оба решения. Есть ли среди них верное? Если какое-то из решений неверно, то почему? Если оба решения неверны, то дайте верное решение.

2. Симметричную монету бросают четыре раза.

а) Составьте таблицу возможных элементарных событий опыта;
б) назначьте вероятность каждого элементарного события;
в) найдите вероятность события «орёл выпал только один раз»;
г) найдите вероятность события «решка выпала больше двух раз».