МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 55. Случайные события. Вероятности и частоты

Примерный сценарий урока по теме «Случайные события. Вероятности и частоты». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]*. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.*

Цель урока – знакомство учащихся с понятием случайного события и его вероятности. У учащихся должно сложиться представление о том, что вероятность случайного события – это числовая мера его правдоподобия, а также о том, что вероятность и частота события близки друг к другу, если один и тот же опыт повторять множество раз.

Оборудование: калькулятор.

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события. Будем называть событие *случайным*, если оно относится к *случайному* опыту (эксперименту), исход которого нельзя точно предсказать. Например, невозможно предсказать длительность начавшегося или будущего телефонного разговора; нельзя знать, сколько ошибок сделает школьник в предстоящей контрольной работе. При бросании игральной кости невозможно наверняка предсказать, какая из шести граней выпадет. Невозможно предвидеть, на какой лотерейный билет выпадет главный выигрыш, какая команда выиграет чемпионат по футболу. Все это – примеры случайных экспериментов, в которых могут наступать разные случайные события.

Важно! Теория вероятностей рассматривает случайные события не сами по себе, а в рамках *случайных экспериментов (случайных опытов)*. Например, говоря о событии «день будет дождливым», требуется указать дату и место, о котором идет речь. Если условия эксперимента не описаны или описаны плохо, то могут возникнуть противоречия и парадоксы.

[1] Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

Пример 1. Нельзя предвидеть многие события будущего. Например, трудно прогнозируемым явлением является погода. Прогноз погоды часто неточен, поскольку состояние атмосферы сильно подвержено случайной изменчивости. Существуют разные методы прогнозирования, но ни один из них не обеспечивает совершенно точный результат. Потому синоптики используют сразу несколько способов и дают *наиболее вероятный прогноз*.

Например, если завтра в Москве ожидается гроза, невозможно точно сказать, в какое время она начнется, и будет ли вообще. Можно говорить лишь о шансах этого события. В прогнозах погоды можно встретить выражения «гроза сегодня маловероятна», «вероятность грозы 10%», «к вечеру с высокой долей вероятности ожидается гроза». Таким образом, наступление грозы есть событие случайное. Случайными событиями являются также выпадение осадков, направление ветра, потепление или похолодание.

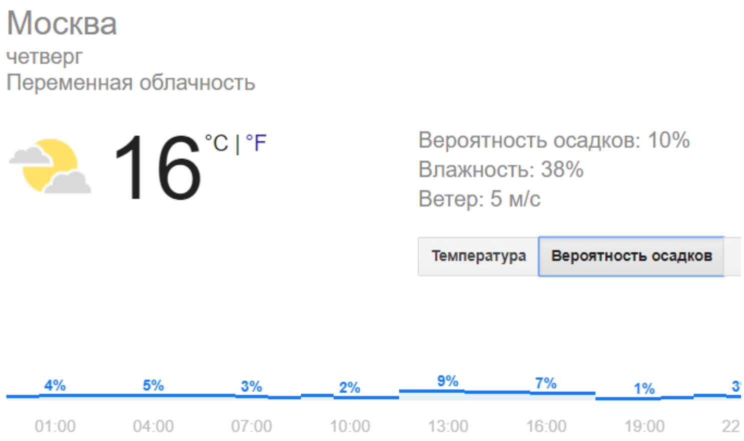
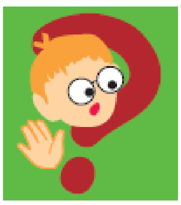


Рис. 1 Прогноз погоды на 2 мая 2019 года. Внизу вероятности осадков в течение дня

Пример 2. Для нефтедобывающих стран, к которым относится Россия, важна рыночная цена на нефть. При составлении бюджета государства на следующий год важно знать, превысит ли средняя цена на нефть некоторый уровень или нет. Например, в 2020 году ожидается, что средняя цена на нефть будет не ниже, чем 50 долларов за баррель. Если средняя цена превысит этот показатель, то в бюджете возникнут свободные средства, а если цена будет ниже, то образуется дефицит бюджетных средств. Безошибочно предвидеть цены на нефть невозможно.

Пример 3. Обсудите с учащимися вопросы из учебника (с. 76):



Вопросы

1. Какие события мы называем случайными?
2. Является ли случайным событие «Меня завтра спросят на уроке»?
3. Является ли случайным событие «Летом у меня будут каникулы»?
4. Является ли случайным событие «Мне сегодня встретится черная кошка»?
5. Вообразите, что вы отправились на рыбную ловлю. Какие случайные события могут произойти при этом?
6. Приведите примеры случайных событий из вашей школьной жизни.

О случайном событии мы часто не можем сказать заранее, произойдет оно или нет. Но мы можем говорить о шансах наступления этого события.

Пример 4. Правильная игральная кость может с равными шансами упасть любой из шести своих граней вверх. Поэтому шансы выпадения единицы такие же, как и выпадения, например, двойки.

В теории вероятностей шанс того, что случайное событие произойдет, выражается числом. Это число называют *вероятностью случайного события*. Если событие никогда не наступает (его шансы равны нулю), то вероятность этого события полагают равной 0. Такое событие называют *невозможным*. Если же событие наступает всегда, его вероятность полагают равной 1. Такое событие называют *достоверным*. Вероятности остальных событий – это числа между 0 и 1. Таким образом, *вероятность случайного события* – это числовая мера его правдоподобия. Чем больше шансов у такого события произойти, тем выше его вероятность.

Важно! Достоверное и невозможное события тоже являются случайными событиями, несмотря на то, что их вероятности точно известны.

Пример 5. При броске симметричной монеты шансы выпадения орла и решки нужно считать одинаковыми, поскольку монета симметрична. Поэтому вероятности выпадения орла и решки равны между собой. А так как при броске монеты других исходов быть не может, полагают вероятности этих событий равной 0,5.

Важно! Нельзя доказать, что вероятности орла и решки равны 1/2. Мы сами назначаем эти вероятности, опираясь на симметричность монеты.

Предложите школьникам назначить вероятность события «при броске игральной кости выпадет шестёрка».

Желательный результат обсуждения. Как уже было сказано ранее, правильная игральная кость имеет одинаковые шансы упасть на каждую грань. Граней всего шесть, шансы выпадения каждой грани равны, поэтому вероятность каждой грани разумно считать равной $\frac{1}{6}$.

Иногда вероятности событий можно рассчитать математически, а иногда приходится приближенно узнавать их из экспериментов.

Повторяя случайный опыт много раз, мы можем увидеть, сколько раз интересующее нас событие происходит, а сколько раз – не происходит. На основе этих данных можно вычислить *частоту случайного события* – отношение числа тех опытов, в которых событие произошло, к общему числу проведенных опытов.

Пример 6. Случайный опыт заключается в том, что стрелок в тире стреляет по мишени, пока не попадет. Опыт провели 10 раз. Результаты серии опытов представлены в таблице.

Номер опыта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
С какого выстрела попал в цель	3	2	5	3	10	7	1	6	4	3

Найдите частоту события:
а) Стрелок попал в мишень с третьего раза;
б) Для поражения мишени стрелку понадобилось не более трех выстрелов;
в) Стрелок попал в мишень с восьмого раза.

Желательный результат обсуждения. а) Судя по таблице, событие «Стрелок попал в мишень с третьего раза» наступило трижды. Частота этого события равна $\frac{3}{10}=0,3$. б) 0,5; в) 0.

Пример 8. По мишени при одинаковых условиях произведено шесть серий выстрелов. Результаты представлены в таблице:

Номер серии	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Число выстрелов в серии	5	10	12	50	100	200
Число попаданий	2	6	7	27	49	102

Найдите частоту события «выстрел попал в цель» в каждой серии выстрелов.

Желательный результат обсуждения. Результаты удобно занести в таблицу.

Номер серии	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Число выстрелов в серии	5	10	12	50	100	200
Число попаданий	2	6	7	27	49	102
Частота попадания	$\frac{2}{5}=0,4$	$\frac{6}{10}=0,6$	$\frac{7}{12}\approx 0,58$	$\frac{27}{50}=0,54$	$\frac{49}{100}=0,49$	$\frac{102}{200}=0,51$

Обратите внимание учащихся на то, что чем больше выстрелов в серии, тем меньшей изменчивости подвержены частоты.

Люди давно заметили, что если число опытов невелико, то частота события может существенно отличаться от одной серии к другой. Если же число опытов в сериях велико, то частоты событий становятся устойчивыми. Если количество опытов увеличивается, то *частота события приближается к его вероятности*.

Это наблюдение позже мы сформулируем и докажем как математическую теорему: *закон больших чисел*. Этот закон является всеобщим законом природы (как, например, закон всемирного тяготения). Он позволяет предсказывать частоты наступления событий по их вероятностям.

Выводы. О случайном событии чаще всего нельзя сказать заранее, произойдёт оно или нет. Но можно говорить о том, насколько оно правдоподобно. Правдоподобие события измеряют с помощью *вероятностей*. Вероятность события выражается числом от 0 до 1. Чем больше шансов у события, тем выше его вероятность.

Не существует единого и универсального способа определить вероятности событий.

1. Иногда вероятности элементарных событий назначают из соображений симметрии (пример: вероятности орла и решки при бросании монеты).
2. Иногда вероятности можно найти приближенно с помощью многократных экспериментов (пример: вероятность поломки телевизора определенной модели в течение гарантийного срока).
3. Иногда вероятности элементарных событий удается вычислить, исходя из известных вероятностей событий в более простом эксперименте (например, можно найти, что при бросании двух монет вероятность выпадения двух орлов равна 0,25, если при бросании одной монеты орёл выпадает с вероятностью 0,5).
4. Иногда вероятности событий не удается назначить никак. Такие события в рамках теории вероятностей не рассматриваются (пример: вероятность того, что в 2050 году будет найдена новая форма жизни).

Если в некотором опыте наблюдается событие A, и этот опыт повторяется много раз, то частота события A постепенно приближается к вероятности события A.

Рекомендуемое домашнее задание: см. приложение

Приложение

Домашнее задание

1. В соревнованиях по биатлону участвует 15 человек. Во время эстафеты каждый сделал на первой огневой точке по пять выстрелов. Результаты стрельбы представлены в таблице (0 – промах, 1 – попадание).

Номер спортсмена	1	2	3	4	5
Результаты стрельбы	00011	10011	11101	01110	10101
Номер спортсмена	6	7	8	9	10
Результаты стрельбы	10100	01101	10110	01111	01000
Номер спортсмена	11	12	13	14	15
Результаты стрельбы	01010	00110	11110	11001	00010

Найдите частоту события:
а) «стрелок не попал с первого раза»;
б) «стрелок промахнулся ровно два раза»;
в) «стрелок промахнулся не менее двух раз»;
г) «стрелок ни разу не промахнулся»;
д) «стрелок сделал пять выстрелов».

2. Игральная кость для настольной игры имеет форму икосаэдра – правильного выпуклого многогранника с двадцатью гранями (см. рисунок). Исходя из симметрии кости, назначьте вероятность события:
а) «при броске кости выпало 15 очков»:
б) «при броске кости выпало чётное число очков».

Ответы:

1. а) $\frac{8}{15}$; б) $\frac{6}{15}=0,4$; в) $1-\frac{3}{15}=0,8$; г) 0; д) 1.

2. а) 0,05; б) 0,5.