МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 43. Точность измерения

Примерный сценарий урока по теме «Точность измерения». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Цель урока – формирование представлений о точности и погрешности измерений. У учащихся должно сложиться представление о прямых и косвенных измерениях, а также о систематической и случайной ошибках измерения. Учащиеся должны понять в ходе урока, что совершенно точные измерения многих величин невозможны, а часто не нужны и даже вредны.

Оборудование: калькулятор, линейка, транспортир, материалы для практикума (шнурок для ботинок длиной около метра и карточки из приложения 1).

Повторение (устно). На пилораме изготовили партию брусков из лиственницы длиной 3 м. Для контроля было выбрано 10 брусков-образцов. В таблице показаны случайные отклонения длин образцов от номинала (3000 мм). Рассмотрите таблицу. Может ли среднее арифметическое длин выбранных образцов быть в точности 3 м?

Номер образца	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Отклонение, мм	6	–8	5	–6	0	–3	4	1	–7	–2

Решение. Сумма отклонений от среднего арифметического равна нулю. Значит, если бы среднее арифметическое равнялось 3000 мм, то сумма отклонений была бы равна 0. Но сумма отклонений в таблице равна –10. Значит, среднее арифметическое отличается от номинального значения длины.

[1] Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

Новый материал

Если нужно посчитать количество конфет в коробке или учеников в классе, то можно провести точный подсчёт. Так бывает при измерении (пересчете) конечного и не очень большого количества объектов.

Если же нужно измерить непрерывную величину (температуру, рост, расстояние, время), то совершенно точное измерение невозможно. Основные причины:

1. Изменчивость самой измеряемой величины;
2. Неточность измерения, вызванная систематическими и случайными ошибками (погрешность в работе приборов, в снятии показаний и т.п.).

Мини-практическая работа. Раздайте учащимся карточки (Приложение 1) по одной на двоих и предложите каждому, независимо от соседа по парте, измерить изображенные на них отрезок (линейкой в миллиметрах) и угол (транспортиром в градусах). Результаты измерений попросите записать в отведенные поля. Пока школьники измеряют и записывают, пустите по рядам небольшой кусок бечёвки (например, обувной шнурок) и попросите каждого заодно измерить и шнурок в миллиметрах.

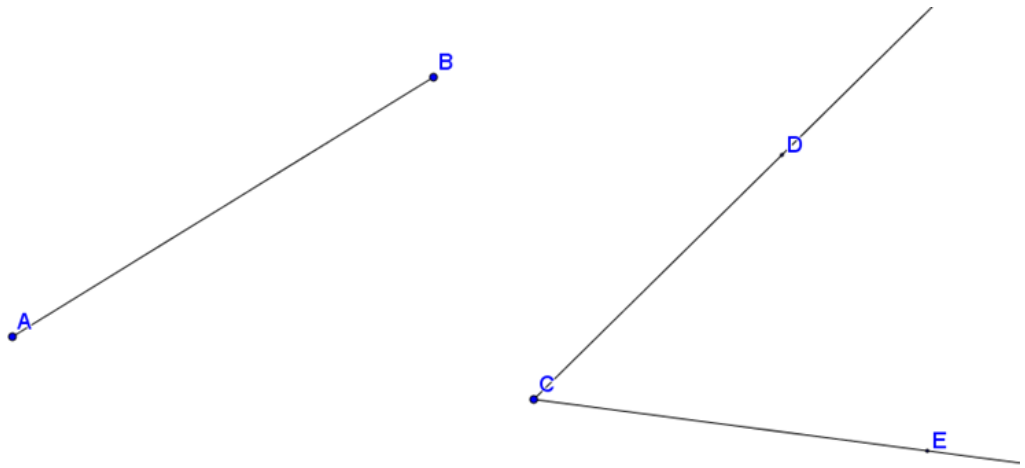


Рис. 1 Измерение отрезка и угла

Соберите результаты измерений[2] и занесите их в таблицу. Дадим пример такой таблицы (табл. 1). Попросите школьников найти в таблицах грубые ошибки измерений. Может быть, даже удастся предположить, что послужило причиной той или иной грубой ошибки. Грубые ошибки – выбросы. Их нужно удалить. Они запутывают и мешают выводам.

После удаления (стирания на меловой или интерактивной доске) выбросов остаются результаты измерений, которые не вызывают недоверия. Мы видим, что результаты измерения отрезка довольно однородны – размах 2 мм. То же самое и с измерением угла с помощью транспортира. Гораздо больше изменчивость измерений шнурка. Обсудите причины малой изменчивости в двух первых измерениях и большой изменчивости при измерении шнурка.

[2] Поручите кому-нибудь из учащихся собрать данные в таблицу на компьютере. В это время можно обсудить пример 1 (точность в производстве) или другие примеры изменчивости (см. учебник).

Табл. 1. Измерения отрезка, угла и длины шнурка

Измерение	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Отрезок (мм)	76	76	76	76	77	76	76	76	76
Угол (°)	52,5	52	52	50	53	51	52	52	**132**
Шнурок (мм)	925	919	965	935	970	915	960	965	970
Измерение	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Отрезок (мм)	77	**66**	76	76	76	76	76	**77**	76
Угол (°)	52	52	51	52	53	52	53	52	52
Шнурок	**370**	930	925	975	910	960	955	970	965
Измерение	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Отрезок (мм)	76	76	76	76	75,3	76	76	76	**84**
Угол (°)	**128**	52	52	51	52	51	52	52	52
Шнурок	968	970	945,6	970	930	970	975	965	970

Желательный результат обсуждения. При измерении отрезка имеются грубые ошибки – выбросы 66 и 84 мм. Результат 66 мм, возможно, получился из-за того, что автор измерения просто допустил описку. Результат 84 получить сложнее, но все же можно предложить правдоподобное объяснение, хотя истину узнать трудно[3].

Измеряя угол, 132 или 128 градусов легко получить, посмотрев на встречную шкалу транспортира. Конечно, опытный измеритель-семиклассник сразу видит, что угол острый, а поэтому результат не может быть больше, чем 90° . Но наш измеритель, вероятно, был неопытен. Вот почему важна прикидка и здравый смысл, а не только *инструментальное* измерение.

В случае со шнурком одно измерение – 370 – сильно отличается от прочих. Откуда оно взялось? Можно предположить, что шнурок измерялся 30-сантиметровой линейкой, и тот, кто измерял, забыл учесть первые два прикладывания линейки и записал только результат третьего измерения. Или просто написал цифру 9 так, что ее прочли, как цифру 3.

Удалим из Таблицы 1 выбросы. Получается новая таблица (табл.2.) без выбросов. Посмотрим, сильно ли рассеяны измерения. Размах измерений отрезков небольшой – 1,7 мм (около 2,2% длины). Размах измерения угла 2° (около 4% величины угла). Размах измерения длины шнурка равен 60 мм. Это довольно много (около 6,5% длины). Почему изменчивость измерений такая разная?

При измерении отрезка сложно понять, где в точности концы. Кто-то пытался поймать самые края, кто-то считал, что концы в центрах изображенных на концах точек. Линейки тоже не одинаковы – шкалы могут немного отличаться. При измерении угла случайных ошибок больше – положение центра

[3] Результат 84 был получен на 16-сантиметровой линейке. Один конец отрезка был по ошибке совмещен не с меткой 0 см, а с меткой 16 см.

транспортира, положение базы транспортира, толщина материала, точность нанесения меток шкалы – все играет роль.

Табл. 2. Измерения отрезка, угла и длины шнурка без выбросов

Измерение	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Отрезок (мм)	76	76	76	76	77	76	76	76	76
Угол (°)	52,5	52	52	52	53	51	52	52	
Шнурок (мм)	925	919	965	935	970	915	960	965	970
Измерение	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Отрезок (мм)	77		76	76	76	76	76	**77**	76
Угол (°)	52	52	51	52	53	52	53	52	52
Шнурок		930	925	970	910	960	955	970	965
Измерение	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Отрезок (мм)	76	76	76	76	75,3	76	76	76	
Угол (°)		52	52	51	52	51	52	52	52
Шнурок	968	970	945,6	970	930	970	975	965	970

Измерить шнурок ещё сложнее. Во-первых, шнурок эластичен. Он растягивается слабее или сильнее в зависимости от того, как его держать. Во-вторых, при измерении пришлось прикладывать линейку несколько раз. Все это делали по-разному, при этом возникали ошибки, которые складывались друг с другом. У кого-то шнурок провисал, у кого-то был натянут, как струна. Кто-то решил обмотать шнурком линейку, а кто-то сложил его в три или в четыре раза, чтобы измерить короткой линейкой.

Учащиеся на этом примере должны убедиться в том, что абсолютно точно измерить размеры предмета невозможно. Тем не менее, мы можем выполнить измерения с определенной *точностью*. Есть два подхода. Можно дать *интервал возможных значений*.

Например, можно сказать, что длина шнурка 91–97 см (наименьшее и наибольшее).

Тот же самый результат можно представить, найдя середину: 94 см. Тогда напишем, что длина равна 94 ± 3 см.

Можно считать, что несколько наименьших и несколько наибольших значений не очень надежны. Отбросим 25% наименьших и 25% наибольших измерений так же, как мы делали при вычислении урезанного среднего. То есть нужно отбросить по 6 наименьших и наибольших значений из следующего вариационного ряда:

910	915	919	925	925	930	930	935	945,6
955	960	960	965	965	965	965	968	970
970	970	970	970	970	970	975	975	

Отброшенные измерения выделены серым фоном. Остаются значения от 930 до 970 мм, то есть 93 – 97 см или 95 ± 2 см.

Подумайте, разумна ли такая *интервальная* оценка длины шнурка для ботинок. Ведь 2 или даже 4 см не играют роли при завязывании. Лучше одно число. Это будет *точечная оценка*. Можно взять среднее арифметическое 952,3 мм и округлить до 95 см или медиану 965 мм и округлить до 97 см.

В разных измерениях итоговый результат представляют по-разному. Где-то очень важно знать возможную погрешность (при измерении размеров деталей машин, времени прохождения сигнала GPS), а где-то достаточно одного приближенного значения при условии, что погрешность не очень велика (длина шнурка, размер обуви, объем пакета с молоком и т.п.)

После лабораторной работы подведите итог: на результат измерения главным образом влияет изменчивость объекта измерения, точность измерения, а также различные ошибки измерения.

Рассмотрим подробнее точность на примерах.

Пример 1. Точность в производстве. В промышленности необходимая точность измерений зависит от того, какие товары производятся.

Если речь идет о деталях мебели, то погрешность изготовления обычно 1–2 мм. Это не мешает собрать мебель, и она имеет хороший внешний вид. Изготовление с большей точностью стоит намного дороже (другое оборудование, материалы, больше случайного брака, больше времени на технологический процесс). Поэтому, когда речь идет о точности при изготовлении товаров, всегда нужно взвешивать все за и против – стремление к совершенству против целесообразности.

При изготовлении технических устройств точность должна быть выше, чем при пошиве одежды или изготовлении мебели. Например, автомобильные подшипники изготавливаются с точностью до 0,01 мм. Такой точности достаточно для исправной работы. Сделать автомобиль из деталей, изготовленных с очень высокой точностью, можно, но затраты на это будут велики, такая машина проиграет конкурентам из-за высокой цены.

Точность измерения для разных величин должна быть разной. Слишком большая точность может быть даже вредна. Например, в ателье, снимая мерки для пошива костюма, измерения делают с точностью 1–2 см (вспомните швейный метр). Точнее мерить можно, но бессмысленно: ткань тянется, да и сам человек тоже эластичен.

Таблица размеров				
Российский	Европейский	Обхват груди,см.	Обхват талии, см.	Обхват бедер, см.
40	XS	83 см.	71 см.	82 см.
42	XS	86 см.	74 см.	85 см.
44	S	89 см.	77 см	88 см.
46	S	92 см.	80 см.	91 см.
48	M	96 см.	84 см.	95 см.
50	M	100 см.	88 см.	99 см.
52	L	104 см.	92 см.	103 см.
54	L	108 см.	96 см.	107 см.
56	XL	113 см	101 см.	111.5 см.
58	XL	118 см.	106 см.	116 см.
60	2XL	124 см.	112.5 см.	120.5 см.
62	2XL	130 см	119 см.	125 см.
64	3XL	136 см.	125.5 см.	130 см.
66	3XL	142 см.	132 см.	135 см.
68	4XL	148 см.	138.5 см.	140 см.
70	4XL	154 см.	145 см.	145 см.

Рис. 2 Таблица размеров одежды

Если посмотреть таблицу размеров одежды (рис. 2), то видно, что российские размеры в сантиметрах примерно «в 2 раза точнее», чем европейская шкала: размер S соответсвует и 44-му и 46-му российским. Так происходит от того, что в европейских странах традиционно измеряют длину деталей одежды не в сантиметрах, а в дюймах (1 дюйм = 2,54 см). Тем не менее, в Европе можно найти одежду, которая хорошо на нас сидит. С обувью бывают проблемы: один размер мал, а следующий – велик. Но все равно нужная обувь найдется – даже внутри одного размера есть изменчивость.

Пример 2. Расстояние между городами. Расстояние между городами – пример величины, которую точно измерить невозможно. Вообще неясно, что считать расстоянием между городами: кратчайшее расстояние – отрезок между двумя точками на земном шаре – проходит через толщу Земли. Кроме того, город – не точка. Приходится договариваться. В России за расстояние между городами принимают расстояние между их центральными почтовыми отделениями (почтамтами). В этом случае расстояние между городами можно измерить с точностью до километра вдоль дорог. Для практических целей этой точности достаточно.

Непосредственные (инструментальные) и косвенные измерения

До сих пор мы говорили о непосредственных измерениях или подсчетах, которые можно сделать с помощью линейки, секундомера, весов или подсчета записей. Это – *непосредственные* измерения. Иногда их называют *инструментальными*. Инструмент, например, линейка или спидометр в автомобиле, непосредственно показывает значение величины с той или иной погрешностью.

Иногда величина такова, что измерить ее непосредственно нельзя. Тогда применяют *косвенные* измерения.

Пример 3. Масса небесных тел. Например, массу планеты измерить непосредственно нельзя – ее не положишь на весы. Но можно измерить силу притяжения, которую создает эта планета, а затем приблизительно вычислить массу планеты. Это – косвенное измерение. Измеряется одна величина, а вывод делается о другой величине. Чаще всего для косвенных измерений применяются математические методы.

Пример 4. Социологические опросы. В социологических опросах измеряется общественное мнение людей в некоторой совокупности (жителей страны, региона, владельцев автомобилей, врачей и т.п.). Непосредственно измерить их совокупное мнение невозможно. Но можно узнать мнение людей в некоторой небольшой выборке. Несложно измерить долю в выборке тех, кто предпочитает те или иные товары, хорошо или плохо относится к законопроектам и так далее. Чтобы сделать правдоподобный вывод о всей совокупности, требуется математика – теория вероятностей, которая на основе выборочных измерений помогает сделать разумные и правдоподобные

выводы обо всей совокупности. Социологические исследования – пример косвенных измерений.

Пример 5. Подумайте, какие из предложеных измерений можно сделать непосредственно, а какие – только косвенно, и почему:
а) Измерение расстояния от Земли до Солнца;
б) Измерение объема пакета сока;
в) Измерение массы автомобиля;
г) Измерение площади озера Байкал;
д) Измерение роста семиклассника;
е) Высоту горы над уровнем моря.

Желательный результат обсуждения. Объем пакета сока, массу автомобиля и рост семиклассника можно определить путем непосредственных измерений. Расстояние от Земли до Солнца, площадь Байкала и высоту горы непосредственно измерить невозможно, поэтому применяются косвенные измерения.

Систематические и случайные ошибки измерения

Мы уже говорили в начале урока о том, что, помимо точности измерения, на результат измерения существенно влияют *систематические и случайные ошибки измерения*.

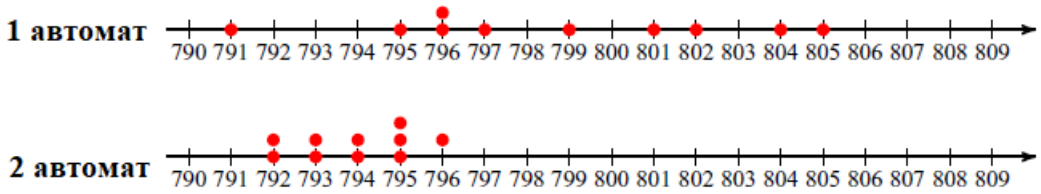
►Систематические связаны с неверной настройкой прибора измерения, оборудования, систематической ошибкой в вычислениях: спешащие часы, плохо настроенные весы, ошибка в формуле и подобное. Такие ошибки не влияют на разброс данных.
►Случайные возникают за счет действия случайных факторов. Случайные ошибки – отклонения, направленные в разные стороны (положительные, отрицательные). Они компенсируют друг друга и, в среднем, суммарная случайная ошибка близка к нулю. Поэтому случайные ошибки не сильно влияют на среднее, но создают случайное рассеивание.

Пример 6. На хлебозаводе стоят два одинаковых дозирующих автомата. Каждый автомат должен отмерять порции теста массой 800 г. На заводе производится проверка оборудования. Для этого инженеры взвесили с большой точностью по 10 порций, отмеренных каждым автоматом. Результаты измерений представлены в таблице.

Автомат	Номер пробы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Масса, г	795	791	801	797	804	802	796	796	805	799
2	Масса, г	793	795	795	794	792	794	796	795	793	792

Попробуйте сделать выводы о состоянии дозирующих автоматов. Какой из них в первую очередь нуждается в ремонте?

Желательный результат обсуждения. Найдем средние значения порции для каждого автомата. У первого автомата среднее равно 798,6 г (отличается от номинала на 1,4 г), а у второго – 793,9 г (отличается от номинала на 6,1 г). Казалось бы, с первым автоматом все в порядке – он дает небольшую ошибку в среднем. Но, чтобы разобраться в ситуации, представим измерения наглядно, отметив для каждого автомата полученные значения точками на числовой прямой:



Видно, что порции теста, выдаваемые первым автоматом, сильно разбросаны по массе. Иными словами, случайная величина «масса порции» у первого автомата имеет большое рассеивание. Такая случайная изменчивость скорее всего, вызвана большим износом деталей, так что первый автомат определенно требует серьезного ремонта. У второго автомата разброс данных небольшой (это говорит о хорошем состоянии механизма в целом), такая систематическая ошибка исправляется небольшой регулировкой.

Вывод: сильное отклонение среднего значения от номинала говорит о систематической ошибке. А рассеивание данных – о случайной.

Пример 7. Геннадий заметил, что на его машине показания спидометра и GPS-навигатора отличаются. В таблице приведены выборочные измерения скорости автомобиля. Как по вашему мнению, требуется ли замена или ремонт спидометра?

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Показания спидометра, км/ч	53	53	52	63	62	83	85	84	95	94
Показания навигатора. км/ч	50	50	50	60	60	80	80	80	90	90
Номер измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Показания спидометра, км/ч	95	106	104	105	114	116	125	126	137	135
Показания навигатора. км/ч	90	100	100	100	110	110	120	120	130	130

Желательный результат обсуждения. Спидометр показывает скорость выше, чем GPS-навигатор. Показания навигатора можно считать довольно точными, поскольку они опираются на данные от спутников. Можно предположить, что у спидометра есть систематическая ошибка. Чем выше скорость, тем больше различие в показаниях. Поскольку ошибка зависит от значения, найдем *относительную ошибку* – в процентах.

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Разность показаний, %	-5,0	-6,0	-4,0	-5,0	-4,0	-4,0	-6,0	-5,0	-5,0	-4,0
Номер измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Разность показаний, %	-6,0	-6,0	-4,0	-5,0	-4,0	-5,0	-4,0	-5,0	-5,0	-4,0

В среднем спидометр показывает больше, чем навигатор, на 4,8%. Рассеивание небольшое. Систематическая ошибка не связана с износом. Необходима ли в этой ситуации настройка спидометра? Видимо, нет. Такая ошибка может быть даже полезна – меньше шанс превысить скорость[4].

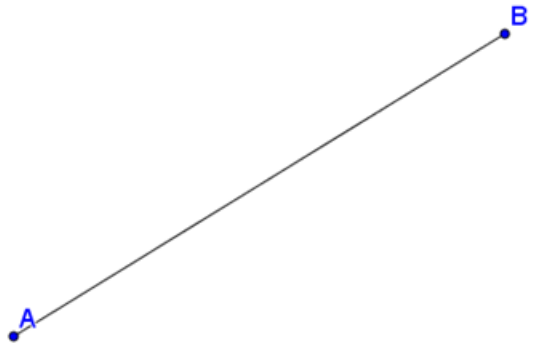
Выводы. Точность измерения для разных величин должна быть разной. Слишком большая точность может быть экономически невыгодна, и даже вредна. Измерения бывают непосредственными и косвенными. Любое измерение содержит ошибку. Ошибки бывают случайные и систематические, они по-разному влияют на разброс данных.

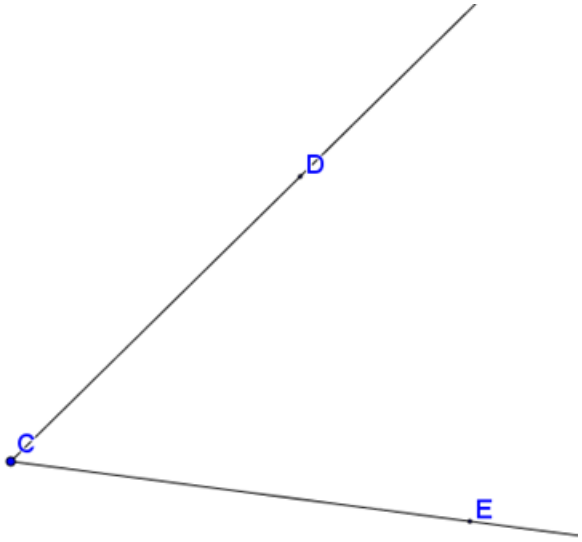
Рекомендуемое домашнее задание: см. приложение 2.

[4] Производители автомобилей обычно сознательно закладывают ошибку спидометра в большую сторону. Часто в техническом паспорте автомобиля написано, что ошибка спидометра составляет, например, от 0 до +6%. Таким образом производитель исключает отрицательную ошибку – когда спидометр показывает скорость меньше, чем на самом деле.

Приложение 1

Лабораторная работа.

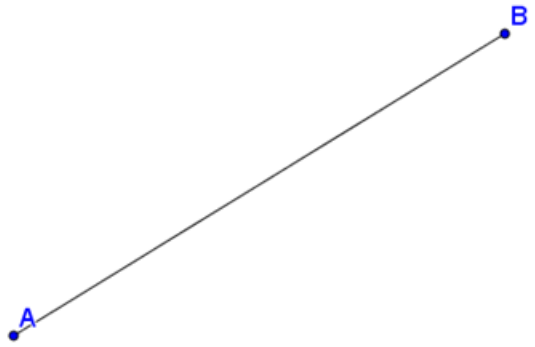


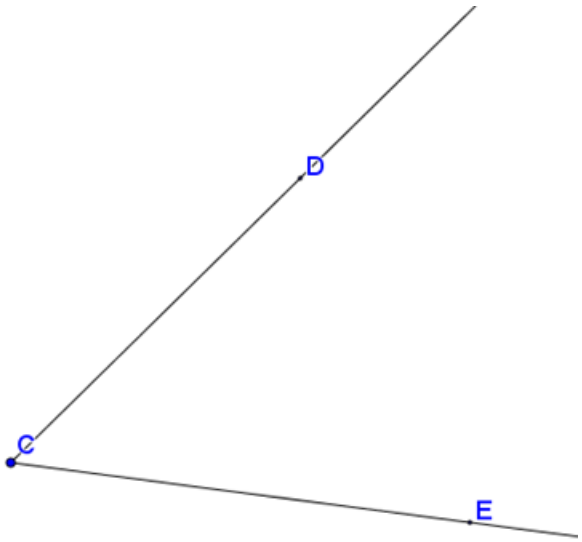


Длина отрезка: _____ мм

Величина угла: _____ ° .

Лабораторная работа.





Длина отрезка: _____ мм

Величина угла: _____ ° .

Приложение 2

Домашнее задание

1. С какой точностью (с какой погрешностью) разумно измерять:

а) массу автомобиля; б) массу планеты Земля;
в) площадь квартиры; г) площадь мирового океана;
д) объем бутылки; е) объем воды в озере.

Какие из этих величин измеряются инструментально, а какие – косвенно? Изучите данный вопрос (интернет, литература), приведите примеры и объясните, почему с вашей точки зрения выбрана эта точность.

2. За рулём нельзя находиться человеку в состоянии алкогольного опьянения. Признаки алкогольного опьянения – содержание алкоголя в крови или в выдыхаемом воздухе. Однако при медицинском освидетельствовании, если прибор показывается не более 0,3‰ (промилле[5]) алкоголя в крови, то считается, что алкоголя в крови нет и водитель трезв. Почему так?

[5] Промилле (символ ‰) – тысячная доля величины, то есть одна десятая процента: 1‰ = 0,1%