МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 27. Размах, полуразмах и середина числового набора

Примерный сценарий урока по теме «Размах, полуразмах и середина числового набора». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или фрагментами наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Цель урока. Сформировать представление о размахе как о «бытовой» описательной мере, которую применяют в повседневной жизни для описания интервала значений. Познакомить учащихся с такими описательными параметрами, как середина интервала и полуразмах, которые являются довольно распространенными мерами центра и рассеивания.

Оборудование: калькулятор.

Повторение (устная работа, 5 мин).

1. Найдите среднее арифметическое и медиану числового набора:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; б) 1, 2, 3, 4, 5, …, 2019;
в) 2, 4, 6, 8, …, 1000.

2. Однажды всем семиклассникам города была дана контрольная работа по математике, которая оценивалась по 100-балльной шкале. Выяснилось, что средний балл всех школьников города равен 44,8, а медиана равна 36.

Руководитель управления образованием очень расстроился, потому что больше половины школьников показали результат ниже среднего. Тогда статистики сказали ему, чтобы он не расстраивался – хуже было бы, если бы было наоборот: если бы больше половины школьников показали результат выше среднего. Как рассуждали статистики?

Ответы и желательный результат обсуждения.

1. В задании 1 во всех случаях среднее и медиана равны полусумме наименьшего и наибольшего:

а) $\frac{1+7}{2}=4$; б) 1010; в) 501.

2. Статистики могли рассуждать следующим образом. Предположим, что результаты школьников *распределены равномерно*: примерно поровну сильных и слабых. Тогда медиана и среднее арифметическое совпали бы или были бы

[1] Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

очень близки (как мы только что видели в задании 1 и как видно на рис. 1а). Но среднее арифметическое намного больше, значит, баллы школьников неравномерны. За счет чего среднее арифметическое «уходит вверх» от медианы? За счет больших выбросов. Это означает, скорее всего, что на общем среднем фоне есть некоторое количество очень сильных школьников, а очень слабых мало или нет вовсе (см. рис.1б).

Новый материал. Размах, полуразмах и середина

На прошлом уроке мы познакомились с размахом числового набора. Вкратце повторим.

Размахом числового набора называют разность между наибольшим и наименьшим числом в наборе. Размах – наиболее простая мера рассеивания данных. Он показывает, как далеко отстоят друг от друга наибольшее и наименьшее значение.

Пример 1 (упр. 1 а, с 56) Найдите размах набора чисел:

12, 7, 25, 3, 19, 15

Решение. Размах равен $25-3=21$.

Достоинство размаха – простота вычисления.

Недостаток размаха – он зависит только от наименьшего и наибольшего значения. Как мы знаем, наибольшее и наименьшее значение массива данных часто бывают неустойчивыми, поэтому и размах – неустойчивая мера. Покажем это на примере.

Пример 2. В 7 классе «а» 30 человек. Их рост показан в таблице 1.

Табл. 1. Рост учащихся 7 класса «а»

Фамилия	Рост, см	Фамилия	Рост, см	Фамилия	Рост, см
Алексеева	156	Ильин С.	151	Симонова	155
Анохин	159	Ильин Ф.	149	Стеценко	154
Баранова	157	Коломиец	158	Стриж	154
Белозеров	155	Куприянова	155	Трифонова	153
Володин	153	Москалев	149	Тун	159
Высоковская	149	Неверов	155	Урядников	158
Герц	168	Обручева	144	Уфимцева	154
Евтюхов	150	Одинцов	156	Шакирова	157
Елистратова	152	Протасова	151	Шелестов	162
Закорюкин	155	Плешник	154	Якир	160

Наибольший рост 168 см (Герц), а наименьший 144 см (Обручева). Размах равен 168 – 144 = 24 см.

Но в день медосмотра, когда медсестра измеряла рост, по разным причинам отсутствовали трое: Герц, Обручева и Уфимцева. Без них наибольший рост равен 162 см (Шелестов), а наименьший равен 149 см (Ильин Ф.). Размах оказался 13 см. Таким образом, вполне вероятное и совсем не удивительное

событие привело к тому, что размах был найден с очень большой ошибкой (почти в два раза). Во многих случаях размах – неустойчивая характеристика.

Итак, размах – неустойчивая мера разброса (или рассеивания данных), поскольку он зависит только от наибольшего и наименьшего значения, которые сами по себе ненадежны. Несмотря на это, размах — очень употребительный описательный параметр.

Пример 3. На деревообрабатывающем комбинате изготавливают мебельные щиты толщиной 28 мм. Сначала древесину пилят на доски толщиной 30 мм и длиной 6 м. Со временем пила изнашивается – появляется люфт[2], зубья стачиваются, поэтому спилы становятся менее ровными. Время от времени контрольную партию готовых досок измеряют, чтобы определить степень износа оборудования. Предположим, что *принято правило*: если наибольшая и наименьшая толщина при измерениях 3 досок отличаются больше, чем на 1,5 мм, пила подлежит замене. Каждую доску измеряют в 7 местах: через каждый метр.

Определите, подлежит ли замене пила, если измерения очередной доски дали следующие результаты (см. табл.2).

Табл.2. Контрольные замеры толщины доски, мм

Замер	1	2	3	4	5	6	7
Доска 1	30,7	30,6	30,9	30,6	**31,2**	31,0	30,9
Доска 2	30,6	30,8	**30,0**	**30,0**	31,1	30,9	30,8
Доска 3	30,8	30,6	30,3	30,4	30,6	30,8	30,8

Решение. Наибольшее значение 31,2 мм, наименьшее значение 30,0 мм, размах равен 1,2 мм. Это меньше, чем 1,5 мм, значит, пока пилу не следует менять.

Обсудите со школьниками содержательный аспект задачи. Почему доски делают толщиной 30 мм, а не 28 мм?

В приведенном примере средняя толщина доски 30,69 мм. О чем это говорит? Хуже или лучше, если бы средняя толщина была меньше 30 мм?

Желательные результаты обсуждения. Свежая доска шершавая и сырая. Сначала ее нужно просушить, а затем разрезать на ламели[3], склеить щиты и отшлифовать их. При сушке доска немного усыхает, а при шлифовке часть древесины срезается и уходит в пыль. Доска становится тоньше примерно на 1 мм с каждой стороны. Поэтому щит имеет толщину 28 мм, а не 30.

Бóльшая средняя толщина доски не страшна – можно срезать больше древесины при шлифовке. Гораздо хуже, если средняя толщина доски будет

[2] Люфт – разболтанность деталей. От немецкого слова «воздух».
[3] Ламели – бруски, из которых делают паркет, мебельный щит и т.п.

меньше 30 см: при шлифовке до 28 мм не все дефекты поверхности могут исчезнуть.

Полуразмах и середина интервала значений. Часто в качестве меры рассеивания используют не размах, а половину размаха $\frac{\max - \min}{2}$.

Серединой интервала значений является число $\frac{\min + \max}{2}$.

Середина интервала и полуразмах – довольно распространенные меры центра и рассеивания. Мы часто говорим: я трачу на дорогу от дома до школы 20 плюс-минус 5 минут. Или: на оплату электричества у нас уходит в месяц где-то 900 плюс-минус 50 рублей. И в том, и в другом случае мы не вычисляем точно ни среднее арифметическое, ни середину, ни размах. Мы делаем приблизительные оценки (используя середину отрезка данных и полуразмах), которые часто оказываются весьма точными. Ведь если в данных нет выбросов и сами значения *распределены* (разбросаны по интервалу значений) более-менее равномерно, то середина интервала близка к среднему арифметическому и к медиане (см. рис.1).

Рис. 1 а) Числа в наборе распределены равномерно: медиана, среднее арифметическое и середина интервала отличаются мало

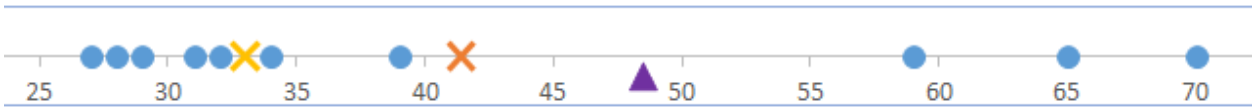

Рис. 1б) Числа распределены неравномерно – большинство в левой части интервала, но есть несколько больших значений; среднее, медиана и середина далеко друг от друга

Пример 4. В двух соседних офисах банка работают сотрудники примерно одинаковой квалификации, результаты деятельности отделений примерно одинаковые, и сотрудников в них поровну. Руководитель отделения банка поручил отделу кадров проанализировать зарплаты в этих офисах. Получилась следующая сводка (см. таблицу 3).

Табл.3. Сводка о зарплатах в двух отделах

	Офис 1	**Офис 2**
Средняя зарплата, р	48 567	48 412
Максимальная зарплата, р	126 000	84 500
Минимальная зарплата, р	17 400	38 500
Медианная зарплата, р	35 400	48 300
Середина интервала, р	71 700	61 500

а) Найдите размах величин зарплат в каждом офисе.
б) На основании всех имеющихся данных попробуйте охарактеризовать распределение зарплат в каждом из офисов.
в) Можно ли наверняка утверждать, что в одном из отделов многие сотрудники получают несправедливо низкую заработную плату?

Желательный результат обсуждения. Размах в первом офисе равен 108 600 р, а во втором – 46 000 р, что намного меньше.

В офисе 1 медиана намного ниже средней зарплаты, а середина интервала (71 700 р) намного больше и средней зарплаты, и медианной. Вероятно, в этом офисе есть несколько сотрудников, которые получают намного больше денег, чем все остальные. В офисе 2 медианная и средняя зарплата практически совпадают. Можно предположить, что зарплаты распределены равномерно и что у большой части сотрудников этого отдела оплата труда примерно одинаковая.

Тем не менее о несправедливости распределения оплаты труда в офисе 1 сделать однозначный вывод по имеющимся данным нельзя. Нужно больше информации. Возможно, нужны более сложные описательные параметры. Пока есть только повод для беспокойства.

Пример 5. а) Найдите середину интервала значений и полуразмах данных в примере 3 (см. табл.2).
б) *Выбрано правило*: будем считать, что значения в наборе данных распределены равномерно, если среднее арифметическое отличается от середины интервала значений не больше, чем на 10% размаха. Можно ли считать, что измерения толщины досок в примере 1 распределены равномерно согласно этому правилу?
Решение. а) Середина интервала равна

$$\frac{\min+\max}{2}=\frac{30,0+31,2}{2}=\frac{61,2}{2}=30,6 \text{ (мм)}.$$

б) Среднее арифметическое измерений равно[4] $30,69$ мм. Разность составляет

$$30,69-30,6=0,09.$$

Составим отношение найденной разности к размаху: $k=\frac{0,09}{1,2}=0,075$.

Это отношение можно назвать коэффициентом равномерности (или еще как-нибудь[5]). Чем этот коэффициент меньше, тем равномернее распределены значения на своем интервале. Осталось сравнить этот коэффициент с критическим значением 0,1 (10% размаха):

$$k=0,075<0,1.$$

Значит, нужно считать, что измерения распределены равномерно.

---

[4] Это дано в условии примера 1, но можно легко подсчитать на калькуляторе, при этом удобно вычесть из всех значений 30 см для упрощения вычислений

[5] В статистике нет общепринятого термина «коэффициент равномерности». Его можно ввести и назвать подходящим способом, чтобы подчеркнуть, что в случае необходимости можно изобрести любой полезный описательный параметр.

Выводы. Размах – «бытовая» описательная мера, которую применяют в повседневной жизни для описания интервала значений. Он показывает, как далеко отстоят друг от друга наибольшее и наименьшее значение. Середина интервала и полуразмах – довольно распространенные меры центра и рассеивания. Если в данных нет выбросов и сами значения распределены достаточно равномерно, то середина интервала близка к среднему арифметическому и к медиане

Домашнее задание. 1. В условиях задачи из примера 3 (про доски) изменим решающее правило: будем считать, что измерения распределены равномерно, если медиана измерений отличается от середины интервала значений менее чем на 15% размаха. Верно ли, что измерения из таблицы 2 равномерны согласно этому новому правилу?

2. Придумайте числовой набор (четыре – пять чисел), который одновременно обладает следующими свойствами:

- медиана равна 5;
- среднее арифметическое равно 7
- середина интервала значений равна 8.

3*. Покажите, что не существует числового набора, который обладает одновременно следующими свойствами:

- размах равен 8;
- среднее арифметическое равно 3;
- середина интервала равна 7

Ответы: 1. Нет, разность составляет более 16%.

2. Например, числа 4, 4, 6 и 14.

3. Предположим, что такой набор существует. Тогда наименьшее число в этом наборе меньше среднего арифметического: $\min < 3$. Середина равна 7, значит, полуразмах больше, чем $7-3=4$, а поэтому размах больше, чем 8. Противоречие.

Дополнительные материалы для подготовки к уроку. Учитель на свое усмотрение может свободно использовать таблицы[6], размещенные на сайте «Вероятность в школе» http://ptlab.mccme.ru/node/350.

При проведении урока в классе, оборудованном компьютерами на столах учащихся, учитель может включить в урок вычисления в электронных таблицах непосредственно на рабочих столах учащихся.

[6] Все данные взяты из открытых источников и представлены в формате .xls или .xlsx. Таблицы можно использовать как целиком, так и делая из них необходимые выдержки.