МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 26. Наибольшее и наименьшее значение, размах числового набора

Примерный сценарий урока по теме «Наибольшее и наименьшее значение, размах числового набора». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или фрагментами наряду с собственными разработками и материалами учебника[1]*. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.*

Цель урока. Сформировать представление об отрезке, на котором сосредоточены числа данного массива; о случаях, когда наименьшее или наибольшее значение являются естественной мерой. Учащиеся должны понять, что во многих случаях минимум и максимум являются наименее надежными показателями, подверженными сильной случайной изменчивости.

Оборудование: калькулятор.

Повторение (устная работа, 5 мин).

1. Среднее арифметическое числового массива равно 5,1. Найдите новое среднее арифметическое, если все числа массива:

а) увеличить в 10 раз; б) уменьшить в 3 раза; в) увеличить на 1,9.

2. В числовом массиве 10 чисел, а их среднее равно 99. Найдите новое среднее арифметическое, если:

а) какое-то одно число массива увеличить на 1;
б) какое-то одно число массива увеличить на 5;
в) два каких-то числа уменьшить на 20;
г) первое число увеличить на 3, а второе число уменьшить на 5.
д) к массиву добавить число 121;
е) из массива удалить число 27.

Ответы: 1. а) 51; б) 1,7; в) 7.
2. а) 99,1; б) 99,5; в) 95; г) 98,8; д) 101; е) 107.

[1] Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

Новый материал. Наименьшее и наибольшее значения. Отрезок (интервал) значений, размах числового набора

В любом конечном наборе[2] чисел всегда есть *наименьшее* и *наибольшее значения*. Иногда их называют *минимальным* и *максимальным значениями* или даже короче – *минимум* и *максимум*. Иногда для удобства пользуются обозначениями $\min$ и $\max$.

Разность между наибольшим и наименьшим значением называется *размахом числового набора*. Размах равен длине отрезка, на котором располагаются все значения. Такой отрезок называют *интервалом значений*.

Рассмотрим простые примеры.

Пример 1. Дан набор чисел. Найти наибольшее и наименьшее значения и размах.

$$1\ 3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 3\ 2\ 7\ 5\ 4\ 3\ 2\ 2.$$

Даже не упорядочивая числа, мы видим, что $\min = 1$, а $\max = 7$. Значит, размах равен $7 - 1 = 6$.

Пример 2. В наборе данных наименьшее значение равно 6, а наибольшее равно 13. Найдите длину интервала значений.

Решение: $13 - 6 = 7$.

Пример 3 (с.54, пример 1). Рассмотрите пример из учебника**.** Ответьте на вопросы 1 – 4 к этому примеру.

Пример 1. Петя и Вася поспорили, кто лучше прыгает в длину с места. Чтобы избежать случайности, они решили, что будут прыгать по очереди 5 раз. Результаты своих прыжков в сантиметрах они записали в таблицу.

Результаты прыжков в длину с места, см

Номер прыжка	Петя	Вася
1	190	185
2	205	200
3	195	215
4	210	190
5	200	190

1. Как вы думаете, почему результаты в разных попытках у ребят отличались?

2. Какие из перечисленных ниже причин могут повлиять на результаты прыжка:

а) удача; б) техника прыжка; в) рост; г) вес; д) хорошая тренированность; е) плохое настроение; ж) плотный обед; з) усталость; и) попутный ветер; к) неподходящая обувь; л) координация движений?

3. Кто из ребят прыгает дальше?

4. Найдите по таблице лучший и худший результат каждого из мальчиков и разность между этими результатами.

[2] Если в наборе бесконечно много чисел, наибольшего или наименьшего элементов может не быть. Бесконечные числовые наборы мы не рассматриваем.

Желательные результаты обсуждения. Все перечисленные факторы могут влиять на дальность прыжка. Более того, некоторые факторы, наверно, упущены. Наилучшим результатом является наибольший. Вероятно, Вася прыгает лучше (у него есть результат 215 см). Но результаты Пети стабильнее: у него размах результатов меньше 20 см (у Васи 30см). В прыжках в длину традиционно оценивается самый дальний прыжок. А вот если бы учитывался не самый дальний прыжок, а сумма трех лучших прыжков, победил бы не Вася, а Петя.

Обратите внимание – наименьшее и наибольшее значения в наборе могут повторяться. В примере 1 наименьшее значение 1 встречается два раза. Можно считать, что это два разных элемента (наблюдения, измерения), но они равны между собой. Поэтому наименьшее значение все равно одно.

Если в числовом наборе все числа совпадают (это неинтересный случай, но он важен для понимания), то наименьшее и наибольшее значение тоже совпадут.

Пример 4. Дан набор из 5 чисел, которые все равны между собой:

4 4 4 4 4.

Наименьшее значение равно 4, наибольшее значение тоже равно 4. Более того, все средние (арифметическое, геометрическое, гармоническое[3], медиана и т.п.) равны между собой и равны числу 4. Размах равен 0.

Важно! Наибольшее значение – это не то значение, которое больше всех остальных чисел в наборе, а то значение, которое не меньше всех других (больше или равно). Аналогично, наименьшее значение – то, которое не больше всех других чисел.

Примеры данных, где важны наименьшие и наибольшее значения нам уже встречались. Например, в результатах спортивных состязаний рекордами являются обычно максимум и минимум. В соревнованиях по прыжкам в длину важен самый дальний прыжок, а в соревнованиях по бегу на данную дистанцию важно наименьшее время.

Попросите школьников привести еще пару примеров, в каких еще спортивных соревнованиях важны наибольшие и наименьшие значения. Приведем еще два примера, уже не связанные со спортом.

Пример 5. При определении фарватера[4] судоходной реки производится промер глубин. Затем на основе промеров находят показатель, который называется *гарантированная глубина судового хода*. Если судно имеет осадку меньше гарантированной глубины, то оно может пройти по фарватеру.

В таблице 1 дан массив результатов промеров глубин на некотором участке фарватера реки.

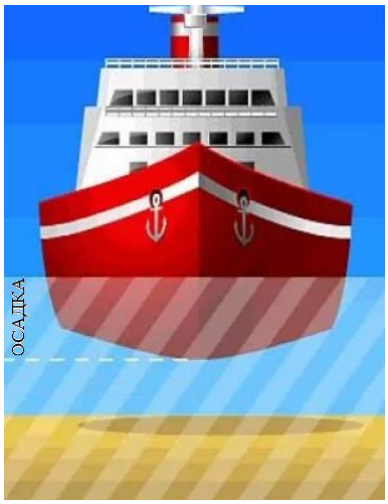
---

[3] Среднее геометрическое и среднее гармоническое могли не изучаться.

[4] Фарватер реки (судовой ход, в дословном переводе – дальняя вода) – безопасный проход по водному пространству реки.

Табл. 1. Глубины на фарватере реки

Промер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Глубина, м	4,2	3,8	4,5	5,3	5,8	5,1	4,8	4,3	4,1



а) Какую меру следует использовать для определения гарантированной глубины?

б) Предложите способ, как определить гарантированную глубину на основе этих данных.

Желательный результат обсуждения. Разумеется, нужно опираться на наименьшую глубину. Она равна 3,8 м. Следовательно, суда с такой или большей осадкой[5] пройти по фарватеру не смогут. Нужно задать школьникам вопрос, можно ли объявить гарантированной глубиной 3,8 м? Кто-то из школьников может заметить, что уровень воды часто меняется, и если вода в какой-то момент упадет, то глубина станет меньше. Значит, нужно учесть возможные колебания уровня воды. Кроме того, если на реке волнение, судно может «проседать» на волне или из-за боковой качки. Еще один фактор: глубина реки меняется в мелких местах – течение намывает песок, потом его уносит. Принимая во внимания все факторы, нужно сделать запас. Например, 1 м. Тогда гарантированная глубина будет равна $\min - 1\,\text{м} = 2{,}8\,\text{м}$. Судам с меньшей осадкой проход по этому участку фарватера запрещен.

Пример 6. При проектировании зданий нужно учитывать ветровую нагрузку, которая характерна для данной местности. Ветровая нагрузка – это давление воздуха на вертикальную стену сооружения при ветре. Чем скорость ветра выше, тем больше ветровая нагрузка. Приблизительное соответствие между скоростью ветра в м/с и давлением ветра в паскалях[6] (Па) показано в табл. 2.

Табл. 2. Давление ветра в зависимости от скорости ветра

	Скорость ветра в м/с								
	1	5	10	15	20	25	30	40	50
Давление, Па	0,60	15,0	60,0	135,0	240,0	375,0	540,0	960,0	1500,0

В разных местностях интенсивность ветров разная. На берегах морей, в степи часто случаются сильнейшие ветра или даже ураганы. В лесных массивах вдали от крупных водоемов сильные ветра случаются реже. В каждой местности собирают данные о максимальной наблюдавшейся скорости ветра и в каждой местности свои строительные нормы.

[5] Осадка – глубина, на которую судно погружается в воду, расстояние от нижней точки судна до поверхности воды.

[6] Паскаль (ньютон на квадратный метр) – единица давления. 1 паскаль – это немного. Для сравнения человек весом 60 кг, стоя в ботинках на земле, оказывает на землю давление примерно 20 000 Па.

В таблице 3 показаны результаты измерения максимальных скоростей ветра в Великом Новгороде за период с 1949 по 1963 годы по месяцам. Рассмотрите таблицы 2 и 3 и ответьте на вопросы.

а) Какую меру ветрового давления следует использовать для определения прочности сооружения при проектировании?

б) Определите, на какое ветровое давление нужно рассчитывать сооружения в Великом Новгороде, опираясь на данные наблюдений 1949 – 1963 г.

в) Можно ли использовать данные таблицы 3 в наше время или требуется регулярное обновление наблюдений над скоростью ветра?

Табл. 3. Макс.скорость ветра по месяцам в Великом Новгороде (1949–1963 гг)

Месяц	Макс. скорость ветра, м/с	Год
Январь	28	1954
Февраль	20	1962
Март	24	1950
Апрель	18	1954
Май	18	1962
Июнь	20	1949
Июль	16	1963
Август	16	1961
Сентябрь	16	1962
Октябрь	28	1954
Ноябрь	20	1951
Декабрь	20	1951, 1961

Желательные результаты обсуждения. Конечно, нужно исходить из наибольшего ветрового давления. В Новгороде, судя по данным из таблицы 3, на протяжении 14 лет наблюдений зафиксирована наибольшая скорость ветра 28 м/с в 1954 году. Округлим до десятков вверх: пусть будет 30 м/с. Это соответствует 540 Па. Вероятно, именно эту величину следует взять за основу при расчете прочности сооружений.

Климат постепенно меняется. Данные о скорости ветра могли устареть. Полагаться на них опасно. Для уточнения нужны постоянные наблюдения.

Нетипичность (ненадежность) наибольших и наименьших значений

Пример 7. В фигурном катании применяется специальная система оценивания элементов (прыжков, вращений). Каждый элемент имеет базовую стоимость в баллах. Чем труднее элемент, тем выше его базовая стоимость. После выступления фигуриста 9 судей ставят ему оценки за каждый элемент. Оценки ставятся по 11-балльной шкале (от –5 до +5 баллов). Затем итоговая оценка фигуриста за элементы вычисляется по следующему алгоритму:

- из массива, в котором девять оценок, удаляется одна наименьшая и одна наибольшая оценка за каждый элемент, остается семь оценок за элемент;
- семь оставшихся оценок усредняются: вычисляется их среднее арифметическое;
- получившееся среднее прибавляется к базовой стоимости. Получается оценка за элемент.
- оценки за все отдельные элементы складываются. Результат является итоговой оценкой выступления фигуриста за элементы катания.

На соревнованиях выступал фигурист Петров и в ходе своего выступления выполнил несколько элементов. В таблице показаны базовые стоимости этих элементов и оценки судей.

Табл.4. Базовые стоимости элементов и оценки судей

Элементы	Базовая стоимость	Оценки судей								
Тройной сальхов	4,3	-1	1	2	1	1	1	0	1	1
Каскад: тройной сальхов, ойлер, двойной сальхов	6,1	-2	-3	-2	-1	-2	-2	-2	-3	-1
Четверной тулуп	6,7	-4	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1
Двойной аксель	3,3	0	1	2	0	1	1	0	0	1
Тройной лутц[7]	5,9	-3	-1	0	1	0	1	0	0	0

а) Пользуясь описанным алгоритмом, вычислите оценку за четверной тулуп.

б) Как вы думаете, почему было введено правило об удалении наибольшей и наименьшей оценок?

Ответ и желательные результаты обсуждения. Чтобы найти оценку за четверной тулуп, сперва удалим из оценок судей наименьшую оценку –4 и наибольшую оценку 0. Тогда оценка за четверной тулуп равна

$$6,7+\frac{-1-1-1-1-1-1-1}{7}=6,7-1=5,7\,.$$

Предположим, что кто-то из судей предвзято относится к Петрову. Его оценки могут оказаться сильно ниже или (сильно выше) справедливых. Для того, чтобы эти несправедливые оценки не учитывались в расчете, придумано правило про удаление минимума и максимума. Это правило появилось несколько лет назад после скандала в фигурном катании, вызванного «подсуживанием».

В статистической практике подобные правила встречаются часто. Вспомните, как мы удаляли выбросы, которые искажают облако данных на диаграмме рассеивания. Или заменяли среднее арифметическое медианой, которая устойчивее. Наибольшее и наименьшее значения часто бывают результатами ошибочных измерений. И даже если ошибок нет, наибольшее или наименьшее значение могут исказить статистические выводы (вспомните пример с населением городов-миллионеров в России).

Выводы и итоги урока. Существуют важные виды данных, где нужно знать наибольшее и наименьшее значение. Такие показатели важны не только в спорте. Мы видели примеры с глубинами реки и с ветровым давлением на стены сооружений. Размах – простейшая мера рассеивания данных – равен

[7] Сальхов, ойлер, тулуп и лутцы – виды различных прыжков с вращением в воздухе. Двойной, тройной и т.п. – указание на количество полных оборотов во время прыжка.

разности между наибольшим и наименьшим значением. Он показывает длину интервала значений. Наименьшее и наибольшее значение в числовом массиве часто являются наименее надежными, нетипичными или даже ошибочными значениями. Поэтому нужно с осторожностью включать их в расчеты, а иногда вовсе удалять, как это делают судьи в фигурном катании.

Рекомендуемое домашнее задание. С. 56, упр. 1, 2**.**

Дополнительные материалы для подготовки к уроку. Учитель на свое усмотрение может свободно использовать таблицы[8], размещенные на сайте «Вероятность в школе» http://ptlab.mccme.ru/node/350.
При проведении урока в классе, оборудованном компьютерами на столах учащихся, учитель может включить в урок вычисления в электронных таблицах непосредственно на рабочих столах учащихся.

[8] Все данные взяты из открытых источников и представлены в формате .xls или .xlsx. Таблицы можно использовать как целиком, так и делая из них необходимые выдержки.