

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

### Урок 23. Медиана числового набора

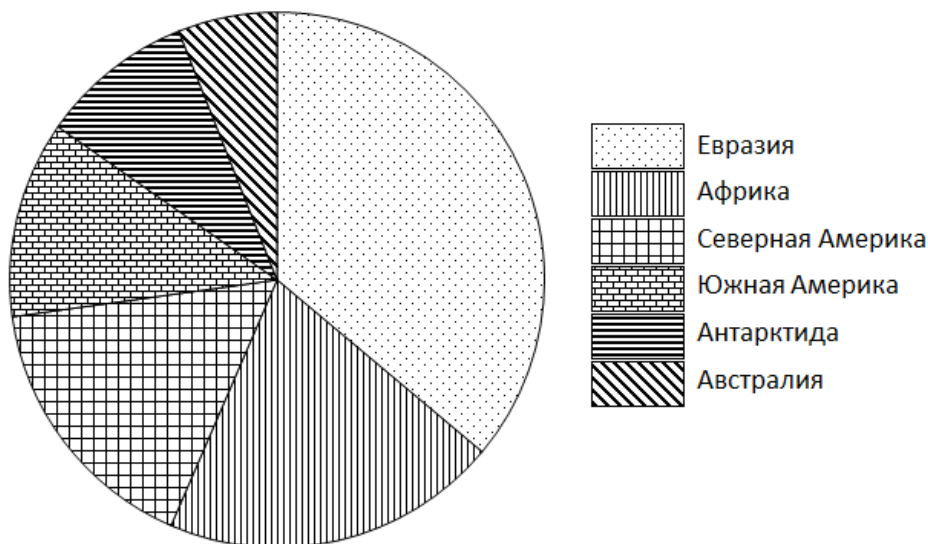
*Материалы представляют собой примерный сценарий урока по теме «Медиана числового набора». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты наряду с собственными разработками и материалами учебника<sup>1</sup>. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.*

**Цель урока.** Познакомить школьников с понятием медианы и научить вычислять медиану числового набора в несложных случаях. Сформировать представление о медиане числового набора как об устойчивой характеристике, подвергающейся меньшей изменчивости, чем среднее арифметическое.

**Оборудование.** Калькулятор.

#### Повторение.

1. В каком случае для представления данных используется круговая диаграмма?
2. На круговой диаграмме показано распределение площади земной суши по всем шести материкам.



<sup>1</sup> Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

Ответьте на вопросы:

а) Верно ли, что Африка и обе Америки вместе занимают примерно половину всей суши?

б) Верно ли, что Африка занимает больше четверти всей суши?

в) Во сколько примерно раз Антарктида больше Австралии по площади территории?

Ответы: а) да; б) нет, чуть меньше; в) примерно в полтора раза.

### Медиана числового набора данных.

**Пример 1 (пример 5, с.51 с обновленными данными).** В 2018 году в России было всего 15 городов с числом жителей более 1 млн человек. Данные о населении этих городов в тысячах человек приведены в таблице 1.

Табл. 1. Численность населения городов-миллионеров РФ

№	Город	Население на 01.01.18 тыс.чел	№	Город	Население на 01.01.18 тыс.чел
1	Москва	12 506	9	Самара	1163
2	Санкт-Петербург	5352	10	Ростов-на-Дону	1130
3	Новосибирск	1613	11	Уфа	1121
4	Екатеринбург	1469	12	Красноярск	1091
5	Нижний Новгород	1259	13	Пермь	1052
6	Казань	1244	14	Воронеж	1048
7	Челябинск	1202	15	Волгоград	1014
8	Омск	1172			

Найдем среднее значение численности жителей этих городов в 2018 году. Оно равно приблизительно 2229,1 тыс. чел. Обратите внимание: в таблице нет города, население которого было бы близко к этой величине. Почти во всех городах население лишь немного превышает 1 млн человек. Исключение составляют Москва и Санкт-Петербург.

Обсудите со школьниками, является ли среднее арифметическое хорошим описательным параметром величины «население города-миллионера в России»: если какой-нибудь иностранец узнает, что крупные города в России имеют среднее население 2,2 млн. человек, верное ли представление о типичном крупном городе создастся у этого иностранца?

Как исправить положение? Нужно подобрать более подходящий описательный параметр.

**Желательный результат обсуждения.** Мы уже сталкивались с таким свойством среднего арифметического в уроке 16, когда обсуждали население круп-

нейших городов Московской области. Численность населения города Балашиха оказалась «выбросом», который «оттащил» среднее от наиболее типичных значений. Здесь такими выбросами является население Москвы и С.-Петербурга.

Мы, конечно, помним, что среднее арифметическое гораздо более устойчиво, чем каждое отдельное значение в массиве данных, но в некоторых случаях этой устойчивости недостаточно. Выбросы оказывают большое влияние на сумму, и тогда среднее арифметическое не является хорошим описательным параметром.

В данном случае поступить можно очень просто: удалить выбросы. Если исключить Москву и Петербург, останется 13 городов со средним населением 1198,3 тыс. человек. Это значение вполне удовлетворительно описывает массив численности населения крупных городов. Города, ближайšie к среднему по населению (средние представители): Челябинск и Омск. Население этих городов отличается от среднего менее чем на 30 тыс.чел. (менее 3%). Москву и Петербург придется описывать и учитывать отдельно.

Можно ли придумать такое среднее, которое не реагирует на выбросы? Описательную меру центра, которая устойчивее среднего арифметического? Такая мера центра есть. Она называется *медиана*. Медиана числового набора делит его на две равные по численности части.

**Пример 2 (пример 1, с 48).** Возьмем набор чисел 1, 4, 7, 9, 11. Удобно, что числа записаны по возрастанию. Подберем число  $m$  так, чтобы в наборе оказалось поровну чисел, которые не больше и которые не меньше, чем  $m$ . Очевидно,  $m = 7$ . Три числа не больше, чем 7, и три числа не меньше, чем 7.

**Пример 3 (пример 2, с 48).** Рассмотрим набор 1, 3, 6, 11. Числа тоже записаны по возрастанию, но их четыре, поэтому среди них нет числа, стоящего точно посередине. Любое число от 3 до 6 можно считать медианой этого набора (и даже числа 3 и 6). Обычно в качестве конкретного значения берут среднее арифметическое двух "серединных" чисел. В данном примере это будет число

$$\frac{3+6}{2} = 4,5.$$

Как быть, если в наборе встречаются повторяющиеся числа, а сам набор не упорядочен по возрастанию?

**Пример 4 (пример 3, с.49).** Найдем медиану набора чисел  
12, 2, 11, 3, 7, 10, 3.

Сначала расположим числа по возрастанию. Получится упорядоченный по возрастанию ряд. Его называют *вариационным рядом*<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Вариационный ряд можно получить и упорядочиванием по убыванию. Так обычно поступают в тех случаях, когда данные естественным образом упорядочиваются по убыванию: например, число баллов у спортсменов на соревнованиях и т.п.

2, 3, 3, 7, 10, 11, 12.

Чисел в этом ряду семь, поэтому медианой служит четвертое по счету. Это число 7, оно подчеркнуто. Четыре числа не больше, чем 7 (числа 2, 3, 3 и само число 7) и четыре числа не меньше, чем 7 (числа 7, 10, 11 и 12). Число 7 входит в обе группы.

В этом наборе нечетное число чисел, поэтому медиану было найти очень просто. Чуть сложнее дело обстоит, если чисел четное количество. Найдем медиану набора

12, 2, 11, 3, 7, 10, 3, 15.

Снова упорядочим числа:

2, 3, 3, 7, 10, 11, 12, 15.

Теперь посередине ряда стоят два числа 7 и 10 (подчеркнуты). Медианой можно считать любое число от 7 до 10. Чаще всего эти срединные числа усредняют:  $\frac{7+10}{2} = 8,5$ .

**Комментарий и результаты обсуждения.** Строгое определение медианы можно не давать (это будет сделано в следующем уроке), но можно описать правило или алгоритм построения медианы. Чтобы найти медиану числового набора, нужно:

1. Упорядочить набор по возрастанию (получить вариационный ряд).
2. Если в наборе нечетное количество чисел, то медианой будет число, стоящее посередине упорядоченного набора.
3. Если в наборе четное количество чисел, то медианой будет среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине<sup>3</sup>.

**Пример 5** (пример 4, с.50 с обновленными данными). Найдем среднее арифметическое и медиану данных о производстве пшеницы в России.

Табл.2. Производство пшеницы в РФ (млн т)

Год	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Производство	63,8	61,7	41,5	56,2	37,7	52,1	59,7	61,6	73,3	85,8

Среднее арифметическое: 59,3 млн тонн.

Чтобы найти медиану, упорядочим числа:

37,7 41,5 52,1 56,2 59,7 61,6 61,7 63,8 73,3 85,8.

Чисел в ряду 10. Медианой будет среднее между числами 59,7 и 61,6:

$$\frac{59,7 + 61,6}{2} = 60,65.$$

Видно, что в этом примере среднее арифметическое и медиана близки: разность между ними  $60,65 - 59,3 = 1,35$  мала по сравнению с самими числами. Как вы думаете, чем это может объясняться?

<sup>3</sup> В общем случае – любое число, принадлежащее отрезку, ограниченному двумя срединными числами. Если посередине числа  $a$  и  $b$ , то медианой будет любое число  $m$ , если  $a \leq m \leq b$ .

**Желательный результат обсуждения.** В данных о производстве пшеницы нет выбросов. Все значения сгруппированы довольно кучно, поэтому среднее и медиана близки.

**Пример 6.** В таблице 3 даны сведения о площади водной поверхности десяти крупнейших озер и бессточных озер (морей) мира. Посмотрите на таблицу и без вычислений скажите, какое среднее будет лучше описывать площадь типичного крупного озера: среднее арифметическое или медиана.

**Табл. 3. Площадь водной поверхности крупнейших озер мира (кв.км)**

	Озеро	Площадь		Озеро	Площадь
1	Каспийское море	376000	6	Аральское море	51100
2	Верхнее	82100	7	Танганьика	32900
3	Виктория	68100	8	Байкал	31500
4	Гурон	60000	9	Бол.Медвежье	31326
5	Мичиган	57800	10	Ньяса	30800

Проверьте свое предположение с помощью вычислений. Можете ли вы указать озеро, чья площадь близка к среднему арифметическому? К медиане (*медианного представителя*)?

**Ответ и желательный результат обсуждения.** Средняя площадь равна 82162 кв. км, медиана данных равна 54450 кв. км. Представитель среднего – озеро Верхнее, медианные представители - Мичиган и Аральское море. Лучше описывает площади крупнейших озер, видимо, медиана, поскольку среднее арифметическое сильно сдвинуто от медианы за счет Каспийского моря – только его площадь больше среднего значения.

**Выводы.** Медиана – средний показатель числового набора, который часто лучше среднего арифметического описывает типичный элемент набора. Особенно преимущества медианы проявляются при наличии выбросов в данных. Для вычисления медианы сперва числа в наборе следует упорядочить, а затем выбрать либо единственное срединное число (если чисел нечетное количество), либо взять среднее арифметическое двух срединных чисел (если в наборе четное количество чисел).

**Рекомендуемое домашнее задание:** с.52, упр. 1 а,в), 4 а), 5 б), 8.

**Дополнительные материалы для подготовки к уроку.** Учитель на свое усмотрение может свободно использовать таблицы<sup>4</sup>, размещенные на сайте «Вероятность в школе» <http://ptlab.mccme.ru/node/350>.

При проведении урока в классе, оборудованном компьютерами на столах учащихся, учитель может включить в урок вычисления в электронных таблицах непосредственно на рабочих столах учащихся.

<sup>4</sup> Все данные взяты из открытых источников и представлены в формате .xls или .xlsx. Таблицы можно использовать как целиком, так и делая из них необходимые выдержки.