

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

### Урок 21. Среднее гармоническое

*Примерный сценарий урока по теме «Среднее гармоническое». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты наряду с собственными разработками и материалами учебника<sup>1</sup>. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.*

**Цель урока** – знакомство учащихся с понятием среднего гармонического набора данных. Учащиеся должны научиться находить приближенно среднее гармоническое числовых наборов с помощью калькулятора. У учащихся должно сложиться представление о том, когда естественным средним является среднее гармоническое, и о том, когда оно не подходит в качестве описательного параметра.

**Оборудование:** калькулятор.

#### Повторение.

На диаграмме представлены данные об объеме импорта России (по данным CIA).



<sup>1</sup> Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

- а) Чем может объясняться резкое падение импорта в 2009 и в 2015 году?  
 б) Какая тенденция наблюдается в последние 2 года?  
 в) В период 1999 – 2008 г.г. наблюдался рост импорта. Каков примерный ежегодный прирост импорта за этот период?

**Решение.** Падение импорта в 2009 году, возможно, объясняется мировым финансовым кризисом 2008 года, а в 2015 году – введением ответных санкций, запрещающих ввоз продовольственных товаров из некоторых европейских стран. Последние два года, судя по диаграмме, объем импорта растет. В период 1999 – 2008 гг. объем импорта увеличился примерно с 50 млрд. до 300 млрд. долларов. Таким образом, за 10 лет увеличение составило 250 млрд. долларов. Ежегодный прирост в среднем составляет 25 млрд. долларов.

### Новый материал. Среднее гармоническое

Убедимся в том, что для некоторых расчетов известные средние не подходят. Сначала обсудим *среднюю скорость*.

**Пример 1.** Василий Петрович отправился по делам из своей отдаленной деревни в райцентр. Первые 5 км Василий Петрович шел пешком через поле со скоростью 5 км/ч, а затем еще 5 км проехал на автобусе со скоростью 35 км/ч. Какова средняя скорость Василия Петровича на всем пути?

**Желательный результат обсуждения.** Среднее арифметическое скоростей равно  $\frac{5+35}{2} = 20$  км/ч. Проверим, подходит ли нам такое среднее.

Весь путь равен 10 км. Если средняя скорость равна 20 км/ч, то вся дорога должна занять полчаса.

Но ведь Василий Петрович только по полю идет час! А всего на дорогу должно уйти  $1 + \frac{5}{35} = 1\frac{1}{7}$  часа. Среднее арифметическое 20 км/ч не подходит для описания средней скорости Василия Петровича.

Попробуем рассуждать иначе. Возьмем в качестве средней скорости *отношение всего пути к общему затраченному времени*. Весь путь равен 10 км.

Общее затраченное время  $\frac{5}{5} + \frac{5}{35} = \frac{8}{7}$  часа. Тогда средняя скорость равна

$$10 : \frac{8}{7} = 10 \cdot \frac{7}{8} = 8,75 \text{ км/ч.}$$

**Пример 2.** Школьница Таня, готовясь сдавать норматив ГТО по бегу, ежедневно пробегает на стадионе ровно 10 кругов с GPS-трекером для бега. Устройство показывает среднюю скорость Тани по итогам пробежки. Результаты измерений за 3 дня занесены в таблицу.

Табл.1. Скорость

Дата	26 ноября	27 ноября	28 ноября
Скорость, км/ч	15	10	14

Найдите среднюю скорость Тани за эти три дня тренировок.

**Желательный результат обсуждения.** Рассуждать будем так же, как в задаче про Василия Петровича, но решим ее в общем виде. Пусть ежедневная дистанция равна  $x$  км. Обозначим скорость Тани в первый, второй и третий день  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  км/ч соответственно.

Тогда общее время бега за три дня равно

$$\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2} + \frac{x}{v_3} = x \cdot \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right).$$

За три дня Таня пробежала  $3x$  км, поэтому средняя скорость равна

$$v_{cp} = \frac{\text{путь}}{\text{время}} = \frac{3x}{x \cdot \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right)} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}.$$

Подставляя известные числа, получаем:

$$\frac{3}{\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14}} = \frac{3}{\frac{14+21+15}{210}} = \frac{3}{\frac{50}{210}} = \frac{3 \cdot 21}{5} = 12,6 \text{ км/ч.}$$

Число 3 в числителе равно количеству усредняемых чисел; знаменатель – сумма величин, обратных данным.

Такое среднее называется *среднее гармоническое*. Обсудите с учащимися, как изменится формула, если измерений будет не три, а четыре (пять, десять)? По итогам обсуждения запишите общую формулу.

**Определение.** Средним гармоническим набора, в котором  $n$  положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , называется величина

$$h = \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n}.$$

**Важно!** Если бы мы знали скорости на протяжении равных отрезков времени, то средняя скорость оказалась бы средним арифметическим. В задачах выше мы знали средние скорости на равных по длине участках. В этом случае средняя скорость оказалась средним гармоническим.

**Пример 3.** Найдите среднее гармоническое чисел

$$1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4 \ 2$$

**Решение.** Обратите внимание учащихся на то, что одинаковые числа дают одинаковые дроби в знаменателе. Их удобно группировать при вычислении.

$$h = \frac{8}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{8}{4 \frac{7}{12}} \approx 1,75.$$

Среднее гармоническое возникает не только как средняя скорость. Например, средняя трудоемкость производства тоже вычисляется как среднее гармоническое.

*Трудоемкость* – время, затраченное на производство единицы продукции.

**Пример 4.** Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой — за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе? Найдите среднее время выполнения заказа одним мастером.

**Решение:** Первый мастер за час выполняет  $\frac{1}{12}$  заказа, а второй —  $\frac{1}{6}$  заказа.

Работая вместе, за час они выполняют  $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$  часть заказа. А значит, весь заказ они выполнят за 4 часа.

Мысленно заменим этих двух мастеров двумя другими мастерами одинаковой квалификации, которые вместе выполняют этот же заказ за те же 4 часа. Поскольку два новых мастера работают с одинаковой производительностью труда, каждый из них выполнит заказ в одиночку за  $4 \cdot 2 = 8$  часов.

За 8 часов выполнит заказ некоторый «усредненный мастер», который работает быстрее первого, но медленнее второго. Получается, что среднее время, требующееся на выполнение заказа одним мастером, не равно среднему арифметическому. Мы снова пришли к среднему гармоническому:

$$\frac{2}{1/12 + 1/6} = 2 : \frac{1}{4} = 8.$$

**Пример 5.** Утром в час пик на городских улицах образуются пробки. Для составления расписания нужно знать среднюю скорость автобуса на маршруте между двумя конечными пунктами. Маршрутный компьютер показывает среднюю скорость в каждой поездке. В таблице 2.1 собраны данные о средней скорости ежедневного автобуса за 10 рабочих дней.

Табл. 2 Скорость автобуса на маршруте

Средняя скорость автобуса (отпр. 9.00)										
Дата	19	20	21	24	25	26	27	28	30	31
Скорость, км/ч	8	13	12	11	12	11	9	10	9	13

Найдите среднюю скорость автобуса на этом участке по данным таблицы. Какое время прибытия на конечный пункт следует поставить в расписание, если протяженность маршрута равна 26 км?

**Решение.** Средняя скорость — это среднее гармоническое данных скоростей. Найдем его с помощью калькулятора<sup>2</sup>:

$$v_{cp} = \frac{10}{1/8 + 2 \cdot 1/13 + 2 \cdot 1/12 + 2 \cdot 1/11 + 2 \cdot 1/9 + 1/10} \approx \frac{10}{0,95} \approx 10,53 \text{ (км/ч)}.$$

Значит, на путь 26 км автобус в среднем тратит

$$t_{cp} \approx \frac{26}{10,53} \approx 2,47 \text{ (ч)}, \text{ то есть примерно } 2 \text{ ч } 28 \text{ мин.}$$

Если автобус выезжает по расписанию в 9.00, то, ориентируясь на среднюю скорость, в качестве времени прибытия нужно назначить 11:28.

<sup>2</sup> Для вычислений на калькуляторе воспользуйтесь специальной функцией  $1/x$ , считающей обратное число.

Предложите учащимся дополнить таблицу строчками «Время в пути» и «Опоздание», в которую нужно вписать «да», если автобус шел дольше, чем 2,47 часа или «нет», если он уложился в это время.

Средняя скорость автобуса (отпр. 9.00)										
Дата	19	20	21	24	25	26	27	28	30	31
Скорость, км/ч	8	13	12	11	12	11	9	10	9	13
Время в пути, ч	3,25	2	2,17	2,36	2,17	2,36	2,88	2,6	2,88	2
Опоздание	да	нет	нет	нет	нет	нет	да	да	да	нет

Обратите внимание: в большинстве случаев (6 из 10) автобус не опаздывает. Но четыре опоздания из десяти – слишком много. Может быть, нужно поставить время прибытия не 11.28, а 11.40, 11.50 или даже 12.00. Обсудите со школьниками плюсы и минусы этих предложений

**Желательный результат обсуждения.** Можно дать небольшой запас во времени. Например, поставить время прибытия 11.30 или 11.35 (такое время легче запомнить, чем 11:28). Если поставить 11.40 или даже позже, то автобусы слишком часто будут приходить сильно раньше расписания, либо водители будут вынуждены специально замедляться. Это не удобно ни водителям, ни компании, ни пассажирам.

**Пример 6.** Трудоемкость работ в автосервисах измеряется в *нормо-часах*<sup>3</sup>. На проведение одной и той же операции для одного и того же автомобиля разные техцентры отводят разное количество нормо-часов. Завод-производитель, имея сведения о количестве нормо-часов, выпускает каталог, в котором указывается рекомендуемое (среднее) количество нормо-часов на каждую услугу. В таблице даны сведения о трудоемкости замены глушителя автомобиля Kia Rio в восьми техцентрах Москвы.

Табл. 3. Количество нормо-часов

Замена глушителя Kia Rio								
Техцентр	1	2	3	4	5	6	7	8
Нормо-часы	1,4	1,5	1,2	1,4	1,5	2,1	1,8	1,2

а) Найдите среднее количество нормо-часов на эту услугу. Ответ округлите до сотых.

б) Найдите среднюю стоимость замены глушителя, исходя из того, что 1 нормо-час в среднем стоит 1200 рублей.

**Решение.** а) Среднее гармоническое данных равно

$$\frac{8}{2 \cdot \frac{1}{1,4} + 2 \cdot \frac{1}{1,5} + 2 \cdot \frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,1} + \frac{1}{1,8}} \approx \frac{8}{5,46} \approx 1,47.$$

<sup>3</sup> Нормо-час – трудоемкость выполнения операции, то есть отведенное на нее рабочее время. На основании среднего количества нормо-часов техцентр рассчитывает стоимость ремонта автомобиля. В действительности рабочие могут сделать работу быстрее или медленнее, но эти особенности не влияют на стоимость работ, которая вычисляется, исходя из среднего количества нормо-часов.

б) При стоимости нормо-часа 1200 рублей замена глушителя обойдется в среднем в  $1200 \cdot 1,47 = 1764$  рубля.

**Выводы и итоги урока.** В случаях, когда речь идет о скорости или трудоемкости, среднее значение вычисляют с помощью среднего гармонического.

**Рекомендуемое домашнее задание:** см. приложение.

**Дополнительные материалы для подготовки к уроку.** Учитель на свое усмотрение может свободно использовать таблицы<sup>4</sup>, размещенные на сайте «Вероятность в школе» <http://ptlab.mccme.ru/node/350>.

При проведении урока в классе, оборудованном компьютерами на столах учащихся, учитель может включить в урок вычисления в электронных таблицах непосредственно на рабочих столах учащихся.

---

<sup>4</sup> Все данные взяты из открытых источников и представлены в формате .xls или .xlsx. Таблицы можно использовать как целиком, так и делая из них необходимые выдержки.

## Приложение

---

### Домашнее задание

1. В таблице даны сведения о количестве нормо-часов на диагностику ходовой части автомобиля Ford Focus в пяти техцентрах Москвы. Найдите среднее количество нормо-часов на эту услугу. Результат округлите до сотых.

**Табл. 4. Количество нормо-часов**

Нормо-часы на диагностику ходовой части Ford Focus					
№ техцентра	1	2	3	4	5
Нормо-часы	0,3	0,4	0,33	0,42	0,38

2. В эстафете участвовала команда, состоящая из 10 школьников. Члены команды бежали по очереди одну и ту же дистанцию, передавая друг другу эстафетную палочку. Средняя скорость бега каждого известна (см. таблицу 5).

**Табл. 5. Скорости бегунов в команде (км/ч)**

Бегун	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Скорость	23,1	27,2	18,9	30,0	32,5	27,5	33,4	25,1	31,2	27,3

Найдите среднюю скорость участника команды на дистанции. Результат округлите до десятых.

**Ответы:** 1. 0,36. 2. 26,9.