

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 19. Среднее геометрическое

Примерный сценарий урока по теме «Среднее геометрическое». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или частично, используя фрагменты наряду с собственными разработками и материалами учебника¹. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Цель урока – знакомство у учащихся с понятием среднего геометрического набора данных. Учащиеся должны научиться находить приближенно среднее геометрическое числовых наборов с помощью калькулятора. У учащихся должно сложиться представление о том, когда естественным средним является среднее геометрическое и о том, когда оно не подходит в качестве описательного параметра.

Оборудование: калькулятор.

Разбор домашнего задания 2.

- а) Средний балл школы 3 равен приближенно 39,6.
- б) Разность между вычисленными приближенными средними 1 и 2 школы меньше 10 баллов, то есть меньше длины интервала группировки. Утверждать, что истинный средний балл выпускников школы 1 выше, чем истинный средний балл выпускников школы 2, нельзя. Может получиться так: в первой школе среднее около 45, а во второй – около 46.
- в) Разница между приближенными средними 1 и 3 школ больше, чем длина интервала группировки 10. Истинные средние отличаются от своих оценок не больше, чем на 5. Даже если в 1-й школе ошибка -5, а в 3-ей ошибка +5, все равно у третьей школы истинное среднее меньше, чем у первой. Поэтому можно утверждать, что истинный средний балл в школе 1 выше, чем в школе 3.

Повторение. 1 (Устно). Среднее арифметическое набора чисел равно 205. Чему будет равно среднее набора, если все числа набора:

- а) увеличить в 10 раз; б) уменьшить на 5;
- в) сначала увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 10?

Ответ: а) 2050; б) 200; в) 400.

¹ Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

2 (Устно). В наборе 10 чисел, их среднее арифметическое равно 8. Чему будет равно среднее арифметическое, если:

- а) первое число в наборе увеличить на 1; б) третье число уменьшить на 2;
в) пятое и восьмое числа увеличить на 3?

Ответ: а) 8,1; б) 7,8; в) 8,6.

Новый материал. Среднее геометрическое

Убедимся в том, что среднее арифметическое в некоторых случаях неуместно и приводит к парадоксальным результатам.

Пример 1. После вырубки части лесного массива в связи со строительством жилого квартала площадь озеленения в районе сократилась на 30%. Через год застройщик озеленил примыкающий к лесному массиву пустырь, в результате площадь озеленения выросла на 40%. Застройщик сообщил, что средний ежегодный прирост площади лесопарковой зоны составил 5%, а экологи утверждают, что в результате действий застройщика площадь зеленого массива сократилась на 2%. Могут ли оба утверждения быть верными? Какое верно?

Желательный результат обсуждения. Судя по заявлению, застройщик считал так: средний процент равен $\frac{-30\% + 40\%}{2} = 5\%$. Но можно ли так работать с процентами?

Пусть до вырубки площадь зеленых насаждений района была равна S . После вырубки – $0,7S$. Если увеличить эту величину на 40%, то итоговая площадь будет равна $0,7S \cdot 1,45 = 0,98S$. То есть, площадь зеленых насаждений не вырастет на 5%, а сократится на 2%.

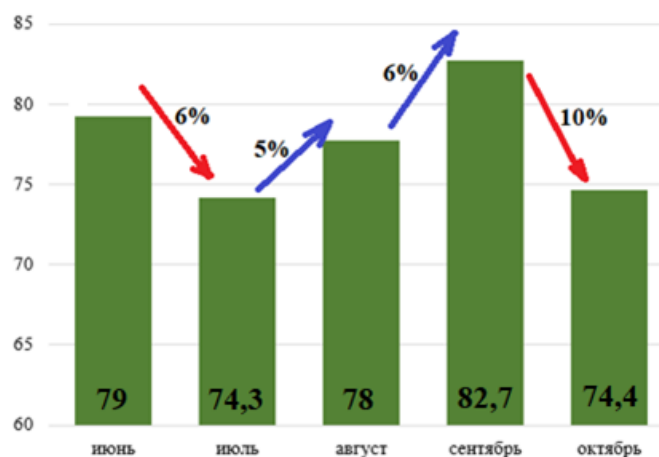
Попросите учащихся рассчитать, на сколько процентов теперь дополнительно нужно увеличить площадь озеленения, чтобы вернуться к исходному значению (2,1% достаточно).

Какое среднее нужно в таких случаях и как его искать?

Пример 2. Среднее геометрическое числового набора.

На диаграмме 1 показаны цены на нефть марки Brent в период с июня по октябрь 2018 года. На диаграмме указано, на сколько процентов приблизительно менялась цена каждый месяц. Определите среднее месячное изменение цены на нефть в процентах за представленный период.

Диагр. 1. Цена нефти Brent (USD за баррель), 2018 г.



Решение. Находить среднее арифметическое процентов не следует – мы в этом уже убедились на предыдущем примере. Узнаем, на сколько процентов изменилась цена за весь период:

$$\frac{74,4}{79} \cdot 100\% \approx 94,2\%.$$

Этот результат можно получить, последовательно умножая начальную цену на соответствующие множители:

$$0,94 \cdot 1,05 \cdot 1,06 \cdot 0,9 \approx 0,942.$$

Цена менялась 4 раза и в итоге упала примерно на 5,8%. Может быть $\frac{5,8\%}{5} = 1,16\%$ – подходящее среднее? Проверим. Если бы цена ежемесячно

уменьшалась на 1,16%, то в октябре нефть стоила бы

$$79 \cdot 0,9884 \cdot 0,9884 \cdot 0,9884 \cdot 0,9884 = 79 \cdot 0,9884^4 \approx 75,4.$$

доллара. А она стоила 74,4 доллара. Ошибка.

Разумно назвать средним изменением такое число a , чтобы выполнялось равенство

$$79 \cdot 0,94 \cdot 1,05 \cdot 1,06 \cdot 0,9 \approx 79 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

то есть

$$a^4 \approx 0,94 \cdot 1,05 \cdot 1,06 \cdot 0,9.$$

Это число a – *среднее геометрическое* чисел 0,94, 1,05, 1,06 и 0,9.

Попробуем подобрать значение a при помощи калькулятора. Итак, произведение множителей $0,94 \cdot 1,05 \cdot 1,06 \cdot 0,9 \approx 0,942$.

Нужно подобрать a так, чтобы a^4 равнялось числу 0,942 (точную десятичную дробь мы найти не сможем), но приближенно это сделать можно.

Если $a = 0,98$, то $a^4 = 0,98^4 \approx 0,9224$. Мало.

Если $a = 0,99$, то $a^4 = 0,99^4 \approx 0,9606$. Много.

Пусть $a = 0,985$. Тогда $a^4 = 0,985^4 \approx 0,9413$. Мало, но уже близко.

Возможно, потребуется еще две-три попытки, чтобы найти хорошее приближение $a = 0,9852$.

Значит, среднемесячное изменение цены равно $(0,9852 - 1) \cdot 100\% = -1,48\%$.

Определение: Средним геометрическим n положительных чисел называют такое положительное число a , что число a^n равно произведению данных чисел.

Пример 3. Найдем с помощью калькулятора среднее геометрическое чисел 2, 3, 3, 4, 1, 5.

Всего чисел 6. Их произведение равно $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 = 360$. Их среднее арифметическое равно 3 – с этого числа можно начать подбор.

$3^6 = 729$. Это много.

$2^6 = 64$. Мало.

$2,5^6 \approx 244,1$. Мало.

$2,7^6 \approx 387,4$. Много, но уже близко.

$2,6^6 \approx 308,9$. Мало

$2,65^6 \approx 346,3$ Нужно еще немного увеличить.

$2,67^6 \approx 362,3$. Очень близко. Можно взять чуть меньше.

$2,668^6 \approx 360,7$. Достигнута хорошая точность. Вероятно, нужно остановиться, хотя можно продолжать еще долго и даже бесконечно долго. Итак, среднее геометрическое чисел 2, 3, 3, 4, 1, 5 равно приближенно 2,668.

Пример 4. В таблице приведены данные об изменении средней цены на золото в течение 7 лет по отношению к прошлогодней цене.

Табл. 1. Изменение цен на золото

Год	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Прирост (падение), %	+11,5%	+5,7%	-26,8%	-2,1%	-10,5%	+8,4%	+13,2%

Определите, на сколько процентов в год в среднем менялась цена золота за указанный период. Выросла или снизилась цена на золото за 7 лет?

Решение. Добавим в таблицу строку «множитель», в которую внесем значения коэффициентов изменения цены.

Год	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Прирост (падение), %	+11,5%	+5,7%	-26,8%	-2,1%	-10,5%	+8,4%	+13,2%
Множитель	1,115	1,057	0,732	0,979	0,895	1,084	1,132

Найдем среднее геометрическое этих множителей.

$$a^7 = 1,115 \cdot 1,057 \cdot 0,732 \cdot 0,979 \cdot 0,895 \cdot 1,084 \cdot 1,132 \approx 0,9276.$$

Каждый раз вычислять среднее геометрическое подбором утомительно. К счастью, почти в любом калькуляторе (годится любой экранный калькулятор в смартфоне или инженерный калькулятор) есть функция, которая позволяет это делать быстро.

Нужно найти такое a , что $a^7 = 0,976$. Введем число 0,976, а теперь нажмем последовательно кнопки



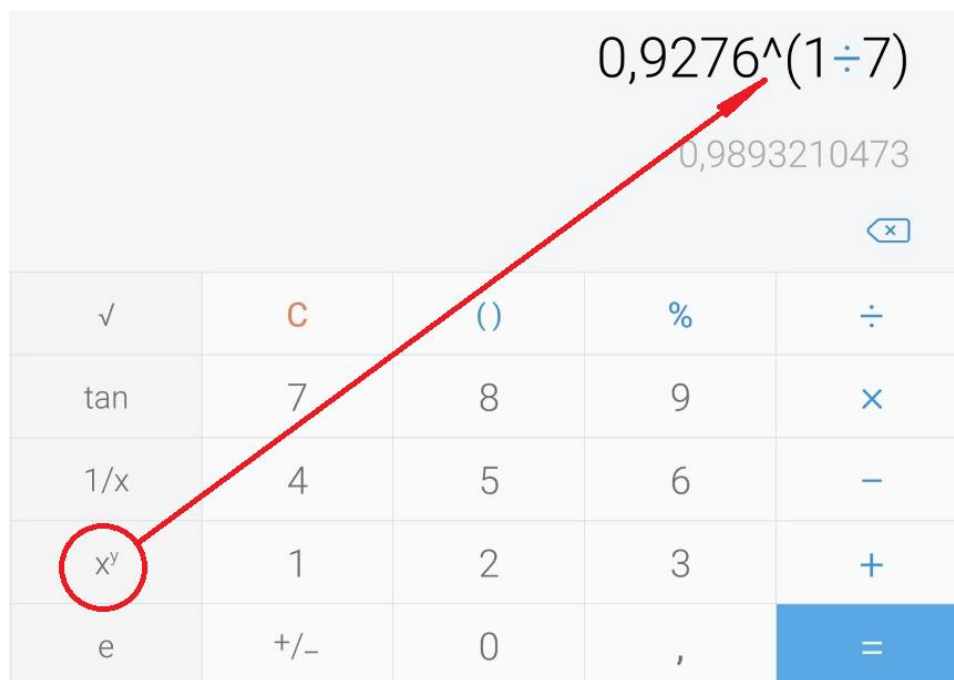


Рис. 1. Вычисление на экранном калькуляторе

Результат на экране (см. рис.1). Среднее геометрическое найдено:
 $a \approx 0,9893$.

Следовательно, среднее изменение в процентах за год равно
 $(0,989 - 1) \cdot 100\% = -1,07\%$.

Среднее изменение отрицательно, это значит, что цена золота снизилась.

Выводы. В случае, когда величина последовательно умножается на разные положительные множители, среднее изменение вычисляют с помощью среднего геометрического. Среднее геометрическое n данных положительных чисел – такое число a , что a^n равно произведению данных чисел.

Рекомендуемое домашнее задание: см. приложение

Дополнительные материалы для подготовки к уроку. Учитель на свое усмотрение может свободно использовать таблицы², размещенные на сайте «Вероятность в школе» <http://ptlab.mccme.ru/node/350>.

При проведении урока в классе, оборудованном компьютерами на столах учащихся, учитель может включить в урок вычисления в электронных таблицах непосредственно на рабочих столах учащихся.

² Все данные взяты из открытых источников и представлены в формате .xls или .xlsx. Таблицы можно использовать как целиком, так и делая из них необходимые выдержки.

Приложение

Домашнее задание.

№1 С помощью калькулятора найдите среднее геометрическое чисел
4,5 6,3 3,8 3,3 7,4 4,6.

№2 Таблица 2 содержит данные об изменении курса евро по отношению к рублю за 8 лет.

а) Найдите среднее годовое изменение курса евро.

б) Найдите средний курс евро в 2010 году.

в) Если бы каждый год прирост был средним (найденным в п. а), сколько стоил бы евро в 2015 г? Чем можно, по вашему мнению, объяснить разницу между полученным числом и истинным курсом 68,03 р?

Табл. 2 Изменение курса евро к рублю (руб. за 1 евро)

Год	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Среднегодовой курс	40,87	39,92	42,31	50,86	68,03	74,39	65,87	73,85
Динамика в %	+1,5	-2,3	+6,0	+20,2	+33,8	9,3	-11,5	+12,1

Ответы.

№1 пригл. 4,79. **№2** а) ср. множитель 1,079, ср. процентное изменение 7,9%;
б) 40,27 р. за евро; в) 58,80 р. за евро. Причина в неравномерности: в начале периода ежегодные изменения были небольшими, а затем – значительно больше.