

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 7 КЛАСС (2 ч./нед.)

Урок 17. Среднее арифметическое. Решение задач

Материалы представляют собой примерный сценарий урока по теме «Среднее арифметическое. Решение задач». Учитель может на свое усмотрение использовать сценарий целиком или фрагментами наряду с собственными разработками и материалами учебника¹. Авторы будут благодарны за замечания и предложения по структуре и содержанию сценариев.

Цель урока – сформировать у учащихся представление о поведении среднего арифметического при изменении одной из величин в числовом наборе (массиве данных) и о том, как формируется среднее при добавлении чисел или объединении числовых наборов. Учащиеся должны научиться вычислять в уме средние наборов равноотстоящих чисел, преобразовывать средние при сдвиге набора или умножении всех значений на один и тот же множитель.

Как среднее арифметическое зависит от каждого значения в наборе

Если в наборе всего два числа, то их среднее арифметическое находится в точности посередине между этими числами (удобно представить числа на числовой прямой).

Пример 1 (Упр. 5а на с. 46). Найдите среднее арифметическое чисел 8 и 10.

Решение. Посередине между этими числами находится число 9. Это и есть среднее. Иногда этот прием помогает, даже когда чисел в наборе больше двух.

Пример 2 (Упр. 6б на с.46). Найдите среднее арифметическое чисел

6, 10, 16 и 20.

Решение. Среднее двух крайних чисел 6 и 20 равно 13. Среднее двух «внутренних» чисел 10 и 16 также равно 13. Поэтому среднее арифметическое всего набора равно 13.

Здесь мы использовали одно свойство среднего арифметического: *если у двух числовых наборов одинаковые средние, то, объединив эти наборы в один, мы получим набор чисел с таким же средним.*

¹ Математика 7-9 класс. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко. – 3-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2011. – 256 с.: ил.

Пример 3. В числовом наборе 9 чисел, их среднее арифметическое равно 6. К этому набору добавили еще одно число x . Найдите среднее арифметическое чисел получившегося набора, если:

$$\text{а) } x = -7; \text{ б) } x = 6; \text{ в) } x = 12.$$

Без вычислений определите, увеличится или уменьшится среднее арифметическое в каждом случае.

Решение. а) Добавляется число, которое меньше среднего. Значит, среднее должно уменьшиться. Сумма чисел нового набора равна $9 \cdot 6 + x = 9 \cdot 6 - 7$. Значит, новое среднее равно $\frac{9 \cdot 6 - 7}{10} = \frac{44}{10} = 4,4$.

Аналогично решаются пункты б) и в). В пункте б) можно сразу заметить, что, поскольку добавляется число 6 (равное среднему), среднее арифметическое не изменится. Ответы: б) 6; в) 6,6.

В примере 2 мы объединяли два набора чисел с одинаковым средним. В примере 3 мы добавляли к числовому набору одно значение. Что будет, если объединить наборы, в которых разные средние и разное количество чисел?

Пример 4. В первом наборе 8 чисел, их среднее равно 3. Во втором наборе 12 чисел, их среднее равно 5. Наборы объединили в один набор. Найдите среднее арифметическое нового набора.

Решение. Зная, сколько в наборе чисел и каково их среднее, несложно найти сумму чисел в наборе. В первом наборе сумма чисел равна $8 \cdot 3 = 24$, а во втором наборе $12 \cdot 5 = 60$. Следовательно, сумма чисел в объединенном наборе равна $60 + 24 = 84$. В этом новом наборе всего $8 + 12 = 20$ чисел, значит, их среднее равно $\frac{84}{20} = 4,2$.

Эти пошаговые рассуждения можно заменить одним вычислением:

$$\frac{8 \cdot 3 + 12 \cdot 5}{8 + 12} = \frac{24 + 60}{20} = 4,2.$$

Важно! Среднее арифметическое объединенного набора расположено на числовой прямой между средними двух исходных наборов. Так получилось не случайно. Предложите школьникам доказать это самостоятельно.

***Случай из жизни.** Не так давно в одной крупной московской больнице заведующий отделением неврологии получил от больничного центра медстатистики данные о среднем числе дней, которые больные провели в отделении. Пациенты, которые были госпитализированы сразу в неврологическое отделение, провели в нем в среднем 14,8 дня. Пациенты, которые были переведены после лечения в других отделениях, провели в неврологическом отделении 8,3 дня. Среднее по всем пациентам равнялось 14,9 дня. Заведующий отделением сразу заподозрил неладное. Как заведующий отделением догадался, что в предоставленной статистике ошибка?*

Чтобы понять, почему среднее объединенного набора находится между средними исходных наборов, полезно при возможности рассмотреть задачу в общем виде². Пусть в первом наборе n чисел, их среднее арифметическое равно a , во втором наборе m чисел, их среднее равно b . Тогда среднее арифметическое объединенного набора c равно

$$c = \frac{na + mb}{n + m}.$$

Предположим для определенности, что $a < b$. Покажем, что $c > a$.

$$c = \frac{na + mb}{n + m} > \frac{na + ma}{n + m} = \frac{a(n + m)}{n + m} = a.$$

Аналогично доказывается, что $c < b$.

Пример 5. В числовом наборе наименьшее значение равно 2, а наибольшее равно 9. Может ли среднее арифметическое такого набора быть равно:

а) 6; б) $5\frac{1}{3}$; в) 1; г) 9?

Если может, приведите пример такого набора, если нет, – объясните, почему.

Решение. Для первых двух вопросов подобрать примеры несложно: 2, 7, 9 и 2, 5, 9. Сложнее обосновать ответы на п. в) и г) Покажем, что число 1 не может быть средним. Предположим, что всего в наборе n чисел. Заменим все числа (в т.ч. и наибольшее число 9) наименьшим значением 2, при этом сумма чисел уменьшится, поэтому среднее значение тоже уменьшится и станет равно

$$\frac{\overbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}^{n \text{ слагаемых}}}{n} = \frac{2 \cdot n}{n} = 2.$$

Значит, у исходного набора среднее значение больше, чем 2. Аналогично показываем, что среднее значение меньше, чем 9.

В примере 5 мы почти все числа набора заменяли на меньшие. При этом среднее арифметическое уменьшилось, поскольку сумма стала меньше. А как изменится среднее арифметическое, если увеличивать или уменьшать только одно значение набора?

Пример 6. В числовом наборе 23 числа. Одно (какое-то) из чисел этого набора увеличили на 1. Как и на сколько изменилось среднее арифметическое этого набора?

Решение. Предположим, что сумма чисел набора равна A . Тогда среднее арифметическое равно $\frac{A}{23}$. Теперь увеличим одно число на 1. Теперь сумма

² Задача в общем виде будет включена в урок по теме «Свойства среднего арифметического». Сейчас ее можно предложить в виде небольшого самостоятельного мини-исследования.

равна $A + 1$, а среднее равно $\frac{A+1}{23}$. Чтобы узнать, насколько выросло среднее, вычтем из нового среднего старое:

$$\frac{A+1}{23} - \frac{A}{23} = \frac{1}{23}.$$

Задачу легко обобщить. Если в наборе n чисел, и одно любое число увеличить (уменьшить) на число k , то среднее увеличится (уменьшится) на число $\frac{k}{n}$. Обсудите со школьниками, что означает этот результат.

Желательный итог обсуждения. Мы знаем, что среднее арифметическое числового набора зависит *от всех значений*. Эта задача показывает нам, как среднее зависит от каждого значения в отдельности. Если значение увеличивать, то среднее арифметическое тоже растет, но в n раз медленнее! Можно сказать, что *среднее арифметическое в n раз устойчивее, чем каждое отдельное значение* в массиве данных. Это важное свойство: отдельные наблюдения подвержены значительной изменчивости. Одни больше, другие меньше, но влияние каждого отдельного значения на среднее не очень велико. *Среднее арифметическое числового набора подвержено изменчивости гораздо меньше, чем отдельные значения.*

Пример 7 (Упр. 11 на с.46). Вычислите среднее арифметическое чисел:

а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 2, 3, 4, 100; г) 1, 2, 3, 4, 1000

Выполняя это упражнение, проследите, как меняется среднее арифметическое при увеличении только одного (последнего) числа в наборе данных. Проверьте, выполняется ли «закон», найденный нами в примере 6.

Мы изучили вопрос, как меняется среднее при изменении одного числа в наборе. Что будет, если все числа изменятся одновременно и одинаково?

Пример 8 (Упр.12а,в на с.46). Вычислите среднее арифметическое двух числовых наборов:

1, 2, 3, 4, 5 и 3, 4, 5, 6, 7.

Сначала предложите учащимся посмотреть, что общего у этих двух наборов и чем они отличаются. Школьники найдут, что числа второго набора получаются из чисел первого прибавлением числа 2. Можно сказать, что первый набор «сдвинули» на 2 единицы вправо. Что произойдет со средним арифметическим? Ясно, что оно тоже сдвинется на 2 единицы вправо.

Решение. Среднее арифметическое первого набора равно 3 (находим без вычислений как середину набора равноотстоящих чисел), среднее арифметическое второго набора равно 5 (тоже середина). Действительно, среднее у второго набора на 2 больше, чем у первого.

Можно предложить школьникам доказать в общем виде, что при сдвиге всех чисел наборе среднее арифметическое «двигается» на ту же величину³. Мы научились «двигать» набор вместе со средним арифметическим. А можно ли «растягивать» или «сжимать» набор? Это можно делать, умножая все числа набора на одно и то же число.

Пример 9 (Упр. 15а,б). Вычислите среднее арифметическое двух числовых наборов

2, 4, 7, 8, 9 и 20, 40, 70, 80, 90.

Так же, как и в примере 8, предложите школьникам сперва найти, что общего у этих наборов. Учащиеся заметят, что второй набор получен из первого умножением на 10.

Решение. Среднее арифметическое первого набора придется подсчитать: сумма чисел равна 30, среднее равно $30 : 5 = 6$. А вот среднее арифметическое второго набора теперь найти легко, поскольку ясно, что 10 можно вынести за скобки:

$$\frac{20 + 40 + 70 + 80 + 90}{5} = 10 \cdot \frac{2 + 4 + 7 + 8 + 9}{5} = 10 \cdot 6 = 60.$$

Выводы и итоги урока. Самое главное: *среднее арифметическое всегда расположено между наибольшим и наименьшим значениями массива данных.* Оно действительно является средним значением.

Теперь мы умеем быстро находить среднее арифметическое, если числа в наборе равноотстоящие: нужно просто взять середину отрезка значений.

Мы научились вычислять среднее объединенных наборов: для этого достаточно знать средние этих наборов и количества чисел в них. *Среднее арифметическое объединенного набора находится между средними арифметическими исходных наборов.*

Мы знаем, что если «двигать» все числа набора, то среднее «двигается» вместе с ним на ту же величину.

Если все числа набора умножить на одно и то же число, среднее арифметическое умножится на то же самое число.

Задачи, рекомендуемые для решения на уроке:

с. 46 №№ 5а, 6б, 7, 11, 12 а, в), 15 а, б).

Рекомендуемое домашнее задание: с. 46 №№ 8, 9, 14 б, г), 16.

Дополнительные материалы для подготовки к уроку. Учитель на свое усмотрение может свободно использовать таблицы⁴, размещенные на сайте «Вероятность в школе» <http://ptlab.mccme.ru/node/350>.

При проведении урока в классе, оборудованном компьютерами на столах учащихся, учитель может включить в урок вычисления в электронных таблицах непосредственно на рабочих столах учащихся.

³ Это будет сделано в одном из следующих уроков в теме «Свойства среднего арифметического»

⁴ Все данные взяты из открытых источников и представлены в формате .xls или .xlsx. Таблицы можно использовать как целиком, так и делая из них необходимые выдержки.