# III Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
# 19 – 25 ноября 2025 г.

## Отборочный этап 10–11 классы

1. В графе нет петель и кратных ребер, а вершин на 10 меньше, чем ребер. Какое наименьшее количество циклов может быть в таком графе?

**Ответ**: 11.

**Решение.** Пусть в этом графе $n$ вершин, $n+10$ ребер и не более 10 циклов. Разомкнем их так, чтобы граф оставался связным. Это можно сделать, убрав не более 10 ребер и не трогая вершины. В результате получится дерево, в котором $n$ вершин и не менее $n$ ребер. Противоречие с тем, что в дереве ребер на единицу меньше, чем вершин. Легко предъявить граф с 11 циклами, который удовлетворяет условию.

2. Некоторый числовой массив обладает тем свойством, что если к каждому числу прибавить число 2, то сумма квадратов чисел массива не изменится. Найдите среднее арифметическое массива.

**Ответ**: $-1$.

**Решение**. Обозначим исходный массив $x_1,\dots,x_n$. Дисперсия массива равна

$$S_x^2=\overline{x^2}-\overline{x}^2,$$

а дисперсия массива, сдвинутого на 2 вправо, равна

$$S_{x+2}^2=\overline{(x+2)^2}-\overline{(x+2)}^2.$$

После сдвига сумма квадратов не изменилась, значит, не изменился средний квадрат: $\overline{(x+2)^2}=\overline{x^2}$. Дисперсия массива при сдвиге также не меняется. Значит, квадрат среднего значения также не изменился:

$$\overline{(x+2)}^2=\overline{x}^2, \text{ то есть } (\overline{x}+2)^2=\overline{x}^2, \text{ откуда } \overline{x}=-1.$$

3. Симметричный игральный кубик бросают много раз. Какова вероятность того, что перед тем как первый раз выпадет грань с нечетным числом, все грани с четными числами выпадут хотя бы по разу?

**Ответ:** 0,05.

**Решение**. Пусть первый раз выпало четное число. Вероятность этого равна $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Если это случилось, то второе новое число (из тех, что не выпадали прежде) окажется четным с вероятностью $\frac{2}{5}$, а третье новое число окажется четным с вероятностью $\frac{1}{4}$. Таким образом, искомая вероятность равна

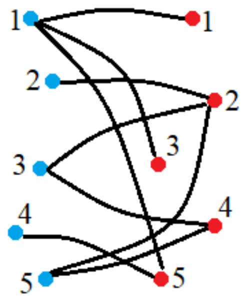
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}.$$

**Другое решение**. Рассмотрим подпоследовательность выпадающих граней, состоящую из чисел, которые не выпадали раньше. В этой подпоследовательности ровно шесть чисел от 1 до 6 в произвольном порядке. Первыми в ней окажутся три четных числа с вероятностью $\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$.

4. В группе детского сада 5 мальчиков и 5 девочек. Между каждым мальчиком и каждой девочкой есть взаимная симпатия с вероятностью $p=0,5$, а с вероятностью $q=0,5$ взаимной симпатии нет независимо от прочих симпатий. По команде воспитателя все дети разбиваются на пары «мальчик–девочка». Сначала формируются случайные пары на основе взаимной симпатии (назовем их добровольными), а уже потом, если симпатий не хватило, – случайные пары, в которых взаимной симпатии нет (вынужденные). Какова вероятность того, что все образовавшиеся пары добровольные? Результат округлите до тысячных.

**Ответ**: 0,298.

**Решение**. Обозначим $p_n$ искомую вероятность для группы, в которой $n$ мальчиков и $n$ девочек. Нужно найти $p_5$. Представим мальчиков синими вершинами графа, а девочек – красными вершинами и пронумеруем каким-либо образом вершины каждого цвета числами от 1 до 5. Если между мальчиком и девочкой есть взаимная симпатия, свяжем соответствующие вершины ребром. Ребра изображают все возможные добровольные пары. Пример такого *двудольного* графа показан на рисунке.




Первый мальчик входит в какую-либо добровольную пару с вероятностью $1-q^5=\frac{31}{32}$. Удалим из графа эту пару и все примыкающие к ней ребра. Останется граф, где 4 синие и 4 красные вершины. В нем все образованные пары окажутся добровольными с вероятностью $p_4$. Поэтому

$$p_5=\frac{31}{32}p_4.$$

Рассуждая так дальше, получаем: $p_5=\frac{31}{32}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\approx 0,298$.

5. В ящике $n$ пронумерованных шаров. Шары вынимали по одному в случайном порядке. Каждый раз вынутый шар возвращали в ящик и шары перемешивали перед следующим извлечением. Случилось так, что в четвертый раз вынули шар, который уже вынимали прежде, а перед этим повторов не было. При каком $n$ вероятность этого события наибольшая?

**Ответ**: 5.

**Решение**. Вероятность указанного события равна

$$p_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{3}{n}=\frac{3(n-1)(n-2)}{n^3}.$$

Найдем $n$, при которых эта последовательность не убывает, то есть $p_n-p_{n-1}\geq 0$:

$$p_n-p_{n-1}=\frac{3(n-1)(n-2)}{n^3}-\frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)^3}=3(n-2)\left(\frac{n-1}{n^3}-\frac{n-3}{(n-1)^3}\right).$$

Осталось найти наибольшее натуральное решение неравенства

$$\frac{n-1}{n^3}-\frac{n-3}{(n-1)^3}\geq 0.$$

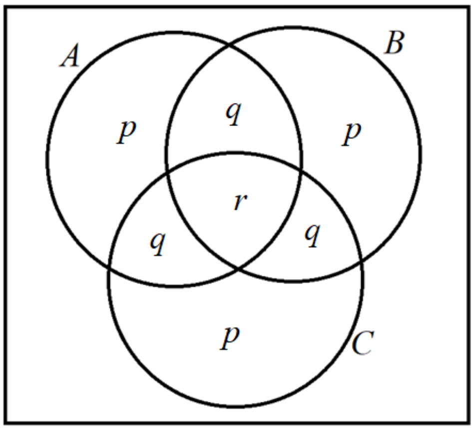
Получаем: $(n-1)^4-n^3(n-3)\geq 0$, откуда $n^3\leq 6n^2-4n+1$.

Очевидно, при $n\geq 6$ неравенство не выполняется, поэтому $p_5>p_6>p_7>\ldots$.

При $n\leq 5$ получаем: $p_5=\frac{36}{125}>\frac{9}{32}=p_4>p_3$ ($p_2=p_1=0$). Событие «*первый повтор при четвертой попытке*» наиболее вероятно при 5 шарах.

6. На рисунке изображена диаграмма Эйлера для событий *A*, *B* и *C* в некотором случайном опыте. В семи областях диаграммы указаны вероятности соответствующих событий. Известно, что события *A* и *B* независимы и что их вероятности отличны от 0.
Найдите наибольшую возможную вероятность события

$$(A\cup B\cup C)\cap\overline{(A\cap B\cap C)}.$$




**Ответ**: 0,75.

**Решение**. Независимость событий $A$ и $B$ дает уравнение

$$(p+r+2q)^2=q+r.$$

Пусть $a=p+q,\ x=r+q$. Тогда

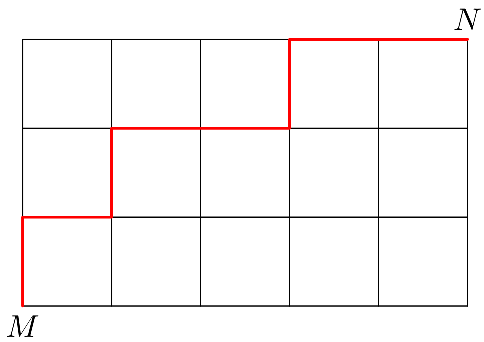
$$(a+x)^2=x;\quad x^2+(2a-1)x+a^2=0.$$

Дискриминант этого трехчлена относительно $x$ должен быть неотрицателен:

$$4a^2-4a+1-4a^2\geq 0,\ \text{откуда}\ a\leq\frac{1}{4}.$$

Событие $(A\cup B\cup C)\cap\overline{(A\cap B\cap C)}$ (наступило хотя бы одно из событий $A, B$ и $C$, но не все три вместе), имеет вероятность $3p+3q=3a\leq\frac{3}{4}$. Значит, это событие не может иметь вероятность больше, чем $\frac{3}{4}$. При этом она равна $\frac{3}{4}$, если $p=q=r=\frac{1}{8}$.

7. Муха ползет из нижней левой вершины $M$ в верхнюю правую вершину $N$ решетки $3\times 5$, случайным образом выбрав один из кратчайших равновозможных маршрутов на этой решетке (на рисунке показан один из таких путей). Иногда она поворачивает налево, иногда – направо. Нас интересует, сколько поворотов сделает муха. Найдите математическое ожидание этой случайной величины.




**Ответ**: 3,75.

**Решение**. Пусть для простоты решетка имеет размер $a\times b$. Каждому пути можно сопоставить двоичную последовательность из $a$ единиц (шаг вправо) и $b$ нулей (шаг вверх). Например, пути, показанному на рисунке, соответствует последовательность 01011011.

Поворот является фрагментом «01» (вероятность этого $\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}$) или фрагментом «10» (с вероятностью $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}$). Значит, вероятность того, что фрагмент из двух соседних символов является поворотом, равна $\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$.

Для каждого фрагмента из двух соседних символов введем индикатор поворота $I_i$, где $i=1,2,\ldots,a+b-1$. Это – случайная величина, которая равна 1, если поворот есть и 0, если поворота нет. Математическое ожидание каждого такого индикатора равно

$$\mathrm{E}I_i=0\cdot\mathrm{P}\left(I_i=0\right)+1\cdot\mathrm{P}\left(I_i=1\right)=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Общее число поворотов равно сумме индикаторов:

$$X=I_1+I_2+\ldots+I_{a+b-1},$$

откуда, переходя к математическому ожиданию, получаем:

$$\mathrm{E}X=\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\ldots+\mathrm{E}I_{a+b-1}=(a+b-1)\cdot\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{2ab}{a+b}=H(a,b),$$

где символом $H$ обозначено среднее гармоническое.

При $a=5, b=3$ получаем $\frac{2\cdot3\cdot5}{3+5}=3,75$.

8. Ломаная на плоскости составлена из трех одинаковых отрезков. Ее крайние звенья случайным образом повернуты относительно центрального звена. Найдите вероятность того, что крайние звенья пересекаются.

**Ответ**: 1/12.

**Решение**. Ломаную, образованную отрезками, назовем $ABCD$. Пусть $\alpha=\angle ABC$ – угол между первым звеном и вторым, а $\beta=\angle BCD$ – угол между вторым и третьим (рис.1). Можно считать, что $0\le\alpha\le\pi$ и тогда $0\le\beta\le2\pi$ . Элементарными исходами являются пары $(\alpha;\beta)$. На координатной плоскости $\alpha O\beta$ они заполняют прямоугольник $G$ (рис. 2), при этом вероятность попадания точки $(\alpha;\beta)$ внутрь некоторой фигуры пропорциональна площади этой фигуры.

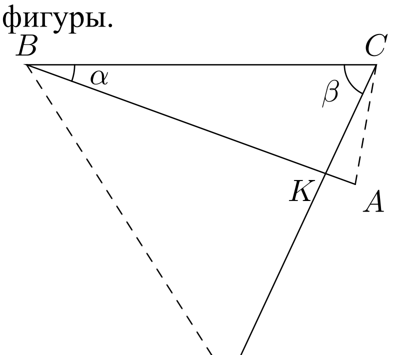



Рис. 1

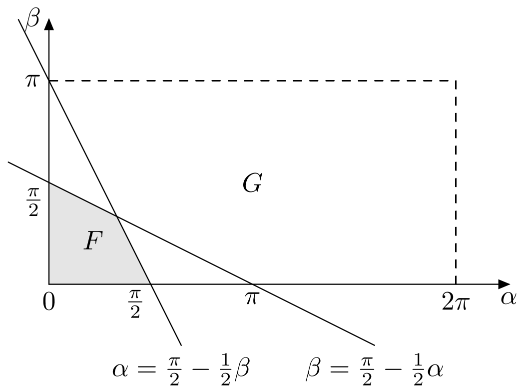



Рис. 2

Первое и третье звенья $AB$ и $CD$ пересекаются в некоторой точке $K$, только если луч $CD$ лежит внутри угла $BCA$, а луч $BA$ лежит внутри угла $CBD$, то есть

$$0 \le \angle BCD < \angle BCA,\ 0 \le \angle ABC < \angle CBD.$$

Учитывая, что треугольники $ABC$ и $CBD$ равнобедренные, получаем:

$$0 \le \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \text{ и } 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

На координатной плоскости $\alpha O \beta$ эти неравенства определяют четырехугольник $F$ внутри прямоугольника $G$. Вероятность самопересечения равна $\mathrm{P}(F) = \frac{S_F}{S_G} = \frac{1}{12}$.

9. Крупная торговая сеть продовольственных магазинов проводит внутренний аудит (независимую проверку) своих поставщиков с их согласия. Сначала проверяется количество жалоб и рекламаций со стороны покупателей на 100 единиц проданного товара.
Если жалоб нет или очень мало, то аудит завершается.
Если жалоб немного, то назначается выборочная проверка условий производства и качества продукции.
Сплошная проверка качества продукции и условий производства обходится втрое дороже выборочной и назначается в двух случаях:
1. Количество жалоб превышает некоторое пороговое значение. Вероятность этого равна 0,25.
2. Выборочная проверка выявила много нарушений. Вероятность этого равна $\beta$.
Главный экономист сети заявил, что, если упразднить выборочную проверку, заменив ее сплошной, то средняя стоимость аудита не изменится, а время аудита сократится. Оказалось, что экономист прав. Найдите вероятность $\beta$.

**Ответ**: $\frac{2}{3}$.

**Решение**. Обозначим проверку количества жалоб, выборочную и сплошную проверки буквами $F$, $S$ и $T$ соответственно. Стоимость каждой проверки для простоты обозначим той же буквой. Пусть проверка жалоб влечет за собой выборочную с вероятностью $\alpha$, а сплошную – с вероятностью 0,25 по условию. Изобразим схему аудита с помощью ориентированного графа (рис. 1).

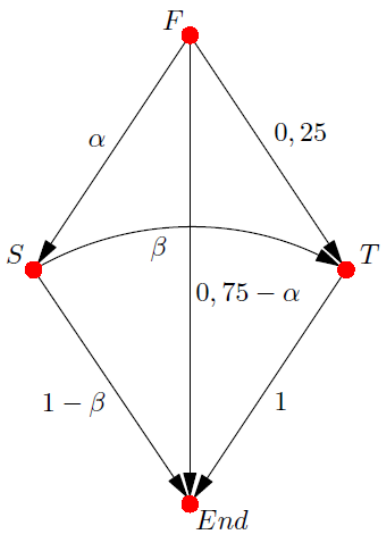


Рис. 1

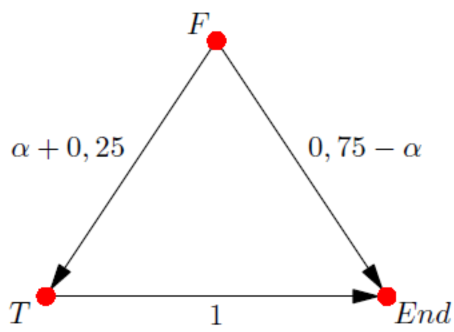


Рис. 2

Пусть $I_S$ и $I_T$ – индикаторы выборочной и сплошной проверки. Каждый индикатор равен 1, если соответствующая проверка назначается, и равен 0, если нет. Тогда стоимость $X$ аудита равна $X = F + I_S S + I_T T$. Это – случайная величина, поскольку величины $I_S$ и $I_T$ – случайные. $\mathrm{E}I_S = \mathrm{P}(I_S = 1) = \alpha$ и $\mathrm{E}I_T = \mathrm{P}(I_T = 1) = 0,25 + \alpha\beta$. Поэтому

$$\mathrm{E}X = F + \alpha S + (\alpha\beta + 0,25)T.$$

Так же найдем среднюю стоимость $Y$ схемы без выборочной проверки (рис. 2):

$$Y = F + I_T T, \text{ откуда } \mathrm{E}Y = F + (\alpha + 0,25)T.$$

Эти величины равны по условию. Учитывая, что $T = 3S$, находим:

$$\alpha S + \alpha\beta T = \alpha T; \quad (1-\beta)T = \frac{1}{3}T, \text{ откуда } \beta = \frac{2}{3}.$$