II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 2024. Дистанционный этап. 10-11 классы. Условия, ответы и решения

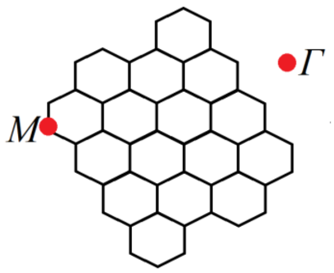
Задача 1. Среди учеников школы каждый четвёртый участвовал в олимпиаде по вероятности. Известно, что среди участников 35% девочек. Считая, что события «*школьник участвовал в олимпиаде*» и «*школьник – девочка*» независимы, найдите вероятность того, что случайно выбранный мальчик из этой школы не участвовал в олимпиаде.
Ответ: 0,75.

Решение. Независимость участия в олимпиаде от пола участника означает, что доли тех, кто не участвовал, среди мальчиков и среди всех одинаковые, то есть три четверти.

Задача 2. В один прекрасный день некая крупная компания выпустила на рынок ценную бумагу. На следующий день эта бумага подорожала на 1% по сравнению с ценой, которая была накануне. Через день на 2% и так далее. На 10 день бумага подорожала на 10%. На сколько в среднем процентов дорожала эта бумага ежедневно? Результат округлите до сотых долей процента.
Ответ: 5,46.

Решение. Сначала удобно найти средний коэффициент ежедневного удорожания как среднее геометрическое чисел 1,01, 1,02 и так далее до 1,10.

Задача 3. На столе из одинаковых спичек выложили 16 маленьких шестиугольников, как показано на рисунке. В самой левой вершине получившегося графа сидит муравей M, а в точке Γ снаружи сидит гусеница. Муравей умеет ползать только по спичкам, а гусеница не умеет переползать через спички. Сколько спичек нужно убрать, чтобы гусеница могла проползти в центр любого шестиугольника, а муравей мог доползти до любой вершины любого шестиугольника?



Ответ: 16.

Решение. В графе 48 вершин и 63 ребра. Чтобы оба условия выполнялись, после удаления рёбер-спичек должно остаться дерево, содержащее все вершины. В этом дереве будет 47 рёбер. Следовательно, нужно убрать $63-47=16$ спичек.

Задача 4. В случайном опыте ровно 5 равновозможных элементарных событий. Рассмотрим все возможные события этого опыта. Сколько из них можно выбрать пар различных независимых событий?
Ответ: 61 или 122.

Решение. Предположим, что какие-то два события A и B независимы, что событию A благоприятствует a, событию B – b, а событию $A \cap B$ – c элементарных событий. Тогда выполняется равенство

$$\frac{a}{5}\cdot\frac{b}{5}=\frac{c}{5},$$

то есть $ab=5c$. Число 5 простое, и все числа не больше чем 5. Значит, либо $a=5, c=b$, либо $b=5, a=c$, либо какое-то из чисел a и b равно нулю (тогда и $c=0$). Получается, что хотя бы одно из событий A или B либо достоверное, либо невозможное.

Если одно из событий достоверное, то в пару ему можно подобрать любое из оставшихся событий, а их осталось $2^5-1=31$.

Если одно из событий невозможное, то в пару ему можно подобрать любое из оставшихся событий.

При этом дважды посчитана пара, состоящая из невозможного и достоверного событий. Значит, всего пар независимых событий $31+31-1=61$.

Задача 5. Среднее арифметическое отметок по математике в первой четверти у Васи равнялось 3,41 – с округлением вниз до сотых. Вася написал проверочную работу на пятёрку, но при этом его средний балл все же не достиг 3,5. Какое наименьшее число отметок по математике могло быть у Васи до того, как он написал проверочную?
Ответ: 17.

Решение. Пусть у Васи было n отметок и их сумма равнялась S. Тогда $3,41n \le S$. После написания проверочной работы средняя отметка стала равна $\frac{S+5}{n+1} < 3,5$. Из этих неравенств получаем, что $3,41n+5 \le S+5 < 3,5n+3,5$, откуда $n > \frac{5-3,5}{3,5-3,41} = 16,66...$ Если $n=17$, то $3,41 \le \frac{S}{17} < 3,5$. В этом промежутке находятся две дроби со знаменателем 17: $\frac{58}{17} = 3,411...$ и $\frac{59}{17} = 3,470...$. Первая удовлетворяет условию задачи.

Задача 6. Алиса и Василиса коллекционируют наклейки с персонажами мультфильмов. Всего в коллекции 20 разных персонажей. У Алисы уже есть 14 разных наклеек, а у Василисы – 16. Какова вероятность того, что, объединив свои наклейки, они смогут выбрать их них полную коллекцию? Ответ округлите до тысячных.

Решение и ответ: $\frac{C_6^6 \cdot C_{14}^{10}}{C_{20}^{16}} = \frac{7 \cdot 11 \cdot 13}{15 \cdot 17 \cdot 19} \approx 0,207$.

Задача 7. Робот в аптеке собирает заказ. Он находит нужное лекарство в 90% случаев. Если с первой попытки лекарство найти не удалось, то робот пытается найти его ещё раз. Третьей попытки нет. В заказе 10 различных лекарств. Найдите математическое ожидание количества правильно найденных лекарств.
Ответ: 9,9.

Решение. Робот не найдет лекарство в обеих попытках с вероятностью $0,01$. Значит, число ненайденных лекарств в среднем 0,1. Найденных: $10-0,1=9,9$.

Задача 8. Когда Рассеянному Учёному приходит в голову гениальная идея, он записывает её на листке бумаги, но тут же понимает, что идея не гениальная, комкает лист и кидает под стол, где стоят две мусорные корзины. Учёный промахивается мимо первой корзины с вероятностью 3/4, и с такой же вероятностью он промахивается мимо второй. За утро Учёный бросил под стол пять скомканных гениальных идей. Известно, что в корзины попало ровно 4 из них. Найдите вероятность того, что ни одна из корзин не пустая.

Ответ: 7/8.
Решение. Вероятность ни разу не попасть в первую корзину, но все четыре раза попасть во вторую, равна $\frac{5!}{0! \cdot 1! \cdot 4!}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$. Такова же вероятность попасть четыре раза в первую,

но ни разу во вторую, причем эти события несовместны. Сумму этих вероятностей разделим на вероятность $\frac{5!}{1!4!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$ события «*четыре идеи попали в корзины*». Получаем:

$$\frac{\frac{2\cdot 5!}{0!\cdot 1!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\frac{5!}{1!4!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{2^5}{4^4}=\frac{1}{8}.$$

Вероятность противоположного события равна 7/8.

Задача 9. На шахматную доску на 8 случайных полей поставили 8 ладей. Ладья бьет все поля, расположенные с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, кроме поля, на котором стоит она сама (другая ладья это поле может бить). Найдите математическое ожидание числа полей, которые находятся под боем хотя бы одной ладьи. Результат округлите до тысячных.

Решение и ответ: $64\left(1-\frac{50\cdot 49\cdot\ldots 43}{64\cdot 63\cdot\ldots\cdot 57}\right)\approx 56{,}237$.