



## Занятия 9 и 10 (1 марта)

### I. Характеристики дискретных распределений

1. Случайная величина  $X$  имеет математическое ожидание и дисперсию и задана бесконечным распределением

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}.$$

Пусть  $f_X(z) = E e^{Xz} = \sum_k p_k e^{kz}$  — производящая функция моментов.

а) Покажите, что  $E X = f'(0)$ .

б) Покажите, что  $D X = f''(0) - E^2 X$ .

2. Случайная величина  $X$  имеет математическое ожидание  $E X$  и дисперсию  $D X$  и представляется в виде суммы *зависимых* бинарных величин  $I_k$ :

$$X = \sum_k I_k$$

Докажите:  $D X = E X + 2 \sum_{k < m} E(I_k I_m) - E^2 X$ .

3. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , имеющей геометрическое распределение  $G(p)$ .

*Указание.* Удобно воспользоваться производящей функцией моментов. Если пользоваться индикаторами, удобно рассмотреть индикаторы событий « $k$ -е испытание окончилось неудачей» (в интерпретации  $X$  как числа испытаний до первого успеха).

4. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , имеющей биномиальное распределение  $Bi(n, p)$ .

*Указание.* Удобно воспользоваться производящей функцией или индикаторами, которые оказываются независимы.

5. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , имеющей гипергеометрическое распределение  $HG(N, K, n)$  ( $N$  — объем совокупности,  $K$  — число помеченных объектов совокупности,  $n$  — объем выборки).

*Указание.* Удобно воспользоваться индикаторами, как в задаче 4, но они в этом случае зависимы.

### II. Непрерывные случайные величины

6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины  $\xi$ :

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

а) Найдите вероятность события  $\xi \leq 2,5$ .

б) Найдите вероятность события  $2,1 < \xi \leq 2,6$ .

в) Является ли случайная величина  $\xi$  абсолютно непрерывной? Если да, напишите функцию плотности для этой случайной величины.

7. Дана функция распределения непрерывной случайной величины  $\xi$ :

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание величины  $\xi$ .

8. Распределение случайной величины  $\xi$  задано плотностью:

$$p(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

а) Найдите функцию распределения  $F_{\xi}$ .

б) Найдите вероятность события  $0 \leq \xi \leq \ln 3$ .

### III. Равномерное, показательное и нормальное распределение

9. Билли Бонс просит подавание. В конце каждого рабочего дня он отправляется в банк и меняет полученную мелочь на купюры по 10 тысяч, 5 тысяч и по тысяче пиастров, на сколько хватает выручки. Оставшиеся пиастры Бонс ссыпает в бочку в подвале своего гаража. Оцените сумму, на которую выросла «капитализация» бочки за 10 рабочих дней.

а) Сделайте точечную оценку с помощью математического ожидания;

б) Сделайте интервальную оценку с помощью интервала шириной три стандартных отклонения и с серединой в математическом ожидании.

10. Предположим, что срок службы светодиодной лампы имеет показательное распределение с параметром «средний срок службы»  $\theta = 20000$  часов. Оцените долю лампочек, которые не испортятся до этого срока.

11. Найдите медиану случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром  $\theta$ . Сравните найденную медиану с математическим ожиданием.

12. Случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение  $N(\mu; \sigma^2)$ . Найдите вероятность события:

а)  $\mu < X < \mu + \sigma$ ; б)  $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$ ; в)  $\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma$ ; г)  $\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma$ .

13. Хорошо известно, что рост взрослого ирландского эльфа<sup>1</sup> подчиняется нормальному распределению со средним 101 см и со стандартным отклонением 5 см. Найдите вероятность того, что первый встреченный взрослый ирландский эльф имеет рост 95 — 98 см.

14. Случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону  $N(0;1)$ . Найдите ширину симметричного интервала  $(-a; a)$ , в который эта величина попадает с заранее заданной вероятностью 0,98:

$$P(X \in (-a; a)) = 0,98.$$

Результат округлите до тысячных.

---

<sup>1</sup>[https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%81\\_%D0%A4%D0%B0%D1%83%D0%BB\\_\(%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%8F\\_%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%81_%D0%A4%D0%B0%D1%83%D0%BB_(%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2))

**Замечание.** Для расчетов, связанных с нормальным распределением, удобно пользоваться функциями Excel

$$= \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x; 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{и} \quad = \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x; 1) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt,$$

их обобщениями на нормальное распределение с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ :

$$= \text{НОРМ.РАСП}(x; \mu; \sigma; \text{flag}),$$

обратной функцией для стандартного распределения

$$= \text{НОРМ.СТ.ОБР}(x) = a, \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^a \varphi(t) dt = x$$

или ее обобщением  $= \text{НОРМ.ОБР}(x; \mu; \sigma)$ .

### Ответы

**3.**  $E X = \frac{1}{p}, D X = \frac{q}{p^2}$ . **4.**  $E X = np, D X = npq$ . **5.**  $E X = n \frac{K}{N}, D X = n \frac{K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$ .

**6.** а) 0,25; б) 0,35; в) да  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ 2x-4, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ 0, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$  **7.** 8/3. **8.** а)  $F_{\xi} = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ; б) 0,25.

**9.** а) 5000 пиастров; б) от  $5000 - 500\sqrt{3}$  до  $5000 + 500\sqrt{3}$ , то есть примерно 4134 — 5866 пиастров. **10.** Около 37%. **11.**  $\theta \ln 2 < \theta$ . **12.** а) 0,341; б) 0,683; в) 0,955; г) 0,997. **13.** 0,1596. **14.** 4,653.