Занятия 11 и 12 (15 марта)

Распределение Пуассона

1. Предположим, что время ожидания некоторого события имеет экспоненциальное распределение $Exp(\theta)$ с функцией распределения $F(t)=1-e^{-t/\theta}$, где параметр θ – среднее время ожидания.

а) Какой смысл имеет выражение $\lambda = 1/\theta$?

б) Пользуясь представлением $e^x \approx 1+x$ при близких к нулю x, найдите приближенное выражение для вероятности p того, в течение интервала времени продолжительностью $1/n$ случится ожидаемое событие.

2. В предположениях задачи 1 составьте выражение для вероятности того, что в течение единицы времени наступит ровно k ожидаемых событий, и найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$. Выпишите пять первых членов полученного распределения Пуассона – распределения случайной величины X «число независимых ожидаемых событий, наступивших в течение единицы времени».

3. Найдите математическое ожидание и дисперсию распределения Пуассона $P(\lambda)$.

4. В обычный воскресный вечер в бутик модной обуви в течение часа в среднем заходит семь посетителей. Считая, что посетители заходят по одному независимо друг от друга, найдите вероятность того, что в обычный воскресный вечер с 18.00 до 18.30 в бутик зайдет:

а) ровно 4 посетителя;

б) не более 5 посетителей.

5. В среднем в течение футбольного матча суммарный счет равен 2,6. Будем считать, что голы забиваются в случайные моменты времени независимо от предыдущих событий в матче. Найдите вероятность того, что:

а) в ходе такого матча будет забито ровно 5 голов;

б) матч окончится со счетом 2:3 в пользу наших (наши и соперники равной силы).

6. Идет обычный футбольный матч.

а) Что более вероятно: четное или нечетное число забитых голов?

б) Если эти события не равновероятны, то на сколько одно из них вероятнее другого (считайте, что среднее число голов в матче равно λ)?

7. Предположим, что в определенных условиях в банк в среднем в час обращается 12 клиентов, и каждый клиент берет талончик в электронную очередь. Какое число талончиков необходимо иметь в запасе, чтобы с вероятностью 0,95 в течение восьми рабочих часов талончики не кончились?

8. В автоматический колл-центр авиакомпании в среднем поступает 27 случайных и независимых обращений в минуту. Каждый сеанс информирования длится ровно 3 минуты. Определите, какое наименьшее число линий связи необходимо иметь в колл-центре, чтобы с вероятностью 0,95 не было не дозвонившихся клиентов?

Ответы

1. а) Среднее число событий в единицу времени; б) $p \approx \frac{\lambda}{n}$ в том смысле, что $p - \frac{\lambda}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. **2.** а) $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. **3.** $\mathrm{E}_P = \lambda$, $\mathrm{D}_P = \lambda$. **4.** а) $\frac{3,5^4}{4! e^{3,5}} \approx 0,189$; б) $e^{-3,5} \sum_{k=0}^{5} \frac{3,5^k}{k!} \approx 0,858$. **5.** а) 0,074; б) 0,023. **6.** а) четное; б) $e^{-2\lambda}$. **7.** 112. **8.** 96.

Расчеты в Excel

Встроенная функция

$$= \text{ПУАССОН.РАСП}(k; \lambda; fl),$$

при $fl = 0$ вычисляет $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, при $fl = 1$ вычисляет сумму $\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$.