Занятие 13 (27 марта)

Неравенство и теорема Чебышева. Закон больших чисел

1. Случайная величина X неотрицательна, то есть все ее значения больше или равны нуля. Пусть она задана дискретным распределением

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}$$

и имеет математическое ожидание $m = \mathrm{E}\,X$. Докажите неравенство Маркова

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{m}{\varepsilon}.$$

2. Пользуясь неравенством Маркова, оцените сверху вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет не менее трех очков.

3. Пусть дискретная случайная величина X имеет математическое ожидание $m = \mathrm{E}\,X$ и дисперсию $d = \mathrm{D}\,X$. Пользуясь неравенством Маркова, докажите неравенство Чебышева

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathrm{P}(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{d}{\varepsilon^2}.$$

4. Можно ли усилить неравенство Чебышева? Указание: рассмотрите случайную величину «число выпавших орлов при бросании одной монеты».

5. а) Пользуясь неравенством Чебышева, оцените сверху вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет не больше двух очков.

б) Что можно сказать о практической ценности неравенств Маркова и Чебышева, опираясь на результаты задач 2 и 4?

6. Пусть X – произвольная дискретная случайная величина с математическим ожиданием m и стандартным отклонением σ. Оцените вероятность того, что эта величина отклоняется в ту или иную сторону от своего среднего больше чем на $k\sigma$.

7. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – одинаковые независимые дискретные случайные величины с математическим ожиданием m и дисперсией d. Докажите теорему Чебышева о том, что среднее арифметическое $\overline{X}$ этих величин сходится к m по вероятности:

$$\overline{X} \xrightarrow{\mathrm{P}} m,$$

то есть

$$\mathrm{P}(|\overline{X} - m| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

8. Предположим, производится серия одинаковых независимых испытания Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Обозначим частоту успехов F. Докажите теорему Бернулли: $F \xrightarrow{\mathrm{P}} p$.

Ответы

1. **Указание**. Разбейте все значения случайной величины на две группы: те, которые меньше ε и те, что не меньше ε и оцените снизу ожидание: $m = \mathrm{E}\,X = \sum_{0 \le x_k < \varepsilon} x_k p_k + \sum_{x_k \ge \varepsilon} x_k p_k$.

2. $\mathrm{P}(X \ge 3) \le \frac{7}{6}$. **3.** **Указание**. Примените неравенство Маркова ко вспомогательной величине $Y^2 = (X - m)^2$. **4.** Без дополнительных условий на случайную величину нельзя. **5.** а) Неравенство Чебышева дает верхнюю оценку $\frac{35}{54}$. И неравенство Чебышева, и неравенство Маркова дают очень грубые оценки, поэтому в практическом смысле несут мало пользы. **6.** $\mathrm{P}(|X - m| \ge k\sigma) \le \frac{1}{k^2}$. **7.** **Указание**. Используйте неравенство Чебышева и свойства дисперсии и матожидания суммы независимых величин. **8.** **Указание**. Представьте частоту F как среднее арифметическое подходящих независимых случайных величин.