И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

Задача 1

ЗАДАЧИ С УЛИЦЫ

Хорошие, настоящие математические задачи прячутся вокруг нас. Входя в метро и увидев заранее заготовленные столбики монет на столе у кассира, пассажир ничего особенного не подумает, а математик вдруг спросит себя: «А каковы шансы, что в двух таких столбиках поровну орлов?» Покупая дочке киндер-сюрприз с принцессой внутри, мама просто покупает очередную игрушку внутри малосъедобного шоколадного яйца. Но маму-математика обязательно заинтересует, сколько же придется купить «киндеров», чтобы собрать всю коллекцию принцесс? Математик — не обязательно тот, кто профессионально работает над сложными математическими проблемами современности, математик тот, кто видит интересную задачу там, где все прочие ничего такого не видят.

Мы хотим сделать серию статей, посвященных таким «задачам с улицы». Отбор задач будет строгим. Во-первых, они должны быть действительно с улицы: очень знакомы и очень понятны. Они не должны быть слишком просты (иначе они попали бы не сюда, а в учебник 5-го класса), но и не должны требовать чересчур сложного математического аппарата. Анонсы задач ниже.

Цель — дать учителю профессиональное развлечение на досуге, одновременно снабжая его темами для учебно-исследовательских проектов, которыми можно занять особо надоедливых и любопытных старшеклассников. Попутно читатель волей-неволей вспомнит кое-что из институтского курса, если забыл.

Все или почти все задачи мы будем снабжать полным числовым решением в электронной таблице. Кроме того, на сайте журнала и на сайте «Вероятность в школе» мы планируем размещать саму таблицу, где читатель может поупражняться, меняя числа в условии и наблюдая, какие результаты получаются.

Для понимания потребуется математика в объеме первого курса (немного рядов и пределов). Полезна формула Стирлинга и чуть-чуть комбинаторики. Впрочем, все это мы напомним. Функции комплексного переменного и топология не нужны.

Автор очень хотел удовлетворить личную просьбу главного редактора и открыть серию задачей о варенье, но не смог. Сначала придется рассказать о настольных играх-бродилках. Тогда рассказ о варенье получится проще.


Фото: tesera.ru/user/Shaston

1. Задача о настольной игре. Игры, где нужно бросать кубики и передвигать фишки по пронумерованным полям на раскрашенной картонке, известны всем с детства. На некоторых полях игроков ждут приключения (пропусти ход, получи приз, откатись назад). На каких полях лучше устраивать такие засады, чтобы игра была поинтереснее? Другой важный для родителей вопрос — как долго продлится игра? Ведь детям скоро спать...

2. Задача о варенье. Мария Петровна варит вишневое варенье в огромном эмалированном тазу и разливает его по литровым банкам. Остатки сливаются тоже в литровую банку. Сколько будет сварено тазов, прежде чем наполнится банка с остатками? Две банки с остатками? Ответ неожиданный. Обобщение задачи приводит к числам Эйлера первого рода, но это уже на любителя.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

3. Задача о такси в Майкопе. Майкоп — небольшой компактный город, поэтому можно считать, что на протяжении двух-трех дней совокупность работающих Яндекс-такси остается практически неизменной и что в любой момент эти такси случайно перемешаны. Командировочный регулярно пользуется Яндекс-такси: гостиница – университет – центр – университет – гостиница. И вот машина повторилась. Это случилось на девятой поездке. Достаточно ли информации для того, чтобы оценить, сколько всего Яндекс-такси в городе? Мы сделаем несколько разных оценок. Попутно, просто к слову, немного расскажем о классических и важных методах теории вероятностей.

4. Задача коллекционера. Сколько нужно купить киндер-сюрпризов, чтобы собрать всю коллекцию из 10 бегемотов или 8 принцесс? Классическая задача (Муавр, 1712, Лаплас, 1812), но не закрытая: еще много нерешенных вопросов. Оценка затрат на коллекционирование приводит к рассказу о последовательности гармонических чисел и ее аппроксимации с помощью натурального логарифма. Какое отношение к этой задаче имеют солдатские котелки?

5. Задача Билли Бонса. Задача, обратная задаче коллекционера: какова вероятность того, что в купленных киндер-сюрпризах окажется ровно k различных принцесс? Более простая постановка задачи — какова вероятность того, что на пяти брошенных костях выпадет ровно три (например) различных числа? Поскольку такой вопрос наверняка приходил в голову пиратам, играющим в кости во время штиля, мы назвали задачу именем известного пирата.

6. Задача о совпадениях. В учительской рассыпались ключи, и завуч в спешке развесил их в произвольном порядке, чтоб не валялись на полу. Сколько ключей в среднем окажется на своих крючках? Верхняя оценка, нижняя? А какова вероятность того, что ровно k ключей окажутся на своем месте, и как все это связано с распределением Пуассона?

7. Задача об узком шоссе. По длинному и узкому шоссе движутся друг за другом много автомобилей. Поскольку обгонять нет возможности, автомобили «сбиваются» в группы. Сколько таких групп окажется? Задача неожиданным образом связана с гармоническими числами.

8. Задача о театралах. В театре ряд кресел упирается в стенку ложи, поэтому проход к креслам этого ряда только с одной стороны. Зрители приходят в случайном порядке. Чтобы пропустить того, кому нужно дальше, тот, кто уже сидит ближе, должен встать и произнести: «Прошу Вас, любезный(ая)». При этом раздается громкий стук: подпружиненное сиденье с силой хлопает о спинку кресла. Сколько будет хлопков? Сколько окажется зрителей, которым ни разу не придется встать? Как эта задача связана с задачей об узком шоссе?

9. Задача стюардессы. Стюардесса предлагает пассажирам курицу с картошкой и рыбу с рисом. В какой-то момент одно из блюд заканчивается и начинаются недовольные пассажиры. Наиболее вероятное и среднее число недовольных? Какой нужен запас, чтобы недовольных не было с достаточно большой вероятностью?

10. Задача о саженцах и овербукинге. Сколько нужно купить саженцев, чтобы из них с достаточно большой вероятностью прижилось нужное число штук? Или сколько продать билетов в самолет, чтобы с большой вероятностью почти не было свободных мест и с большой вероятностью не пришлось отказывать пассажирам, поздно пришедшим на регистрацию? Как эти вероятности связаны между собой?

11. Задача о циклах. В задаче о совпадениях завуч развешивает перепутанные ключи по местам. Он берет какой-то ключ с крючка № 1, вешает его на соответствующий крючок, снимая ключ, который там висел, и перевешивая его куда надо, и так до тех пор, пока у него не окажется в руках ключ № 1, который он и повесит на пустующий крючок № 1. Круг (цикл) замкнулся. Сколько в среднем циклов в случайной перестановке? Какова вероятность того, что в ней нет длинных циклов (длиной более половины числа ключей)? Задача тоже приводит к гармоническим числам, и может быть, даже удастся связать число циклов с числом групп в задаче об узком шоссе или числом не встающих зрителей в задаче о театралах.

12. Задача о строгой учительнице. Учительница посетила открытый урок по теме «Геометрическое распределение». Он ей очень понравился, и она решила провести такой же в своем классе. Но не просто повторить, а улучшить с целью укрепления дисциплины и организации урока. Что из этого вышло? Рассказ по следам эссе Александры Нестеренко, которая на момент написания своего эссе училась в 8-м классе.

13. Задача о жребии «на туза». Четверо бросают жребий: один из них раздает карты из обычной колоды себе и друзьям по кругу до тех пор, пока кому-то не достанется туз. Честный ли это жребий? Чьи шансы выше? Насколько они выше, чем шансы всех прочих?

14. Задача о чемоданах. Папа, мама и дочь прилетели на курорт и ждут три своих чемодана на ленте транспортера в аэропорту. Как распределены их чемоданы? Какова вероятность того,

что все три окажутся в первой сотне чемоданов? Сколько в среднем ждать первого? Задача имеет несколько решений, от полуинтуитивного до строгого и совершенного в своей элегантности. Очевидным образом задача связана с предыдущей задачей о жребии.

15. Задача о разборчивой невесте. Знаменитая задача секретаря (М. Гарднер, 1960) часто предлагается в сюжете про капризную невесту или вынужденного жениха. Чистая комбинаторика плюс степенной ряд логарифма. Задачу трудно считать очень жизненной, но нечто похожее возникает тогда, когда нужно принять оптимальное решение в условиях ограниченного времени и невозможности изменить выбор. Например, есть ли хорошая стратегия у «чемоданного вора» в аэропорту, который крадет один из 200 чемоданов с конвейера в зале выдачи багажа?

16. Задача о распродаже. Входя в магазин или в торговую точку на рынке, где стены завешаны и полки заставлены тем, что никто в здравом уме никогда не возьмет даже бесплатно, невольно задаешь себе вопрос: неужели это кто-то когда-то купит? Как это все можно продать? Несложная математическая модель показывает, что даже при непривлекательном товаре все равно почти все будет распродано в небольшой период времени, причем нераспроданный остаток... не зависит от начального количества товара.

17. Задача кассира. Чтобы быстрее выдавать сдачу, кассиры в метро заранее складывают столбики из монет. Например, 100 рублей пяти- или десятирублевыми монетами. У кассира на столе два таких одинаковых столбика. Какова вероятность того, что в обоих столбиках поровну монет окажутся орлом вверх? Задача приводит к красивой структуре, но сама по себе жизненной не очень является. В самом деле, кому какое дело, сколько там монет орлом вверх?

18. Задача экзаменатора. Это не задача в обычном смысле слова, а небольшая инструкция, как с помощью MS Excel устроить случайную перестановку натуральных чисел или чего-то еще. Например, как совершенно случайно раздать студентам на дистанционном зачете или экзамене билеты без повторений. Среди предыдущих много задач о вероятностных структурах в случайных перестановках. А эта задача о том, как самому устроить случайную перестановку со всеми этими структурами.

Задача о настольной игре «Стоп-числа»

В детстве все любили (многие сохранили эту любовь и во взрослом состоянии) незамысловатые игры: на столе картонное поле с извилистой тропинкой. Игроки по очереди бросают игральный кубик. Сколько очков выпало, на столько шагов игрок продвигает фишку, с которой по дороге приключаются разные истории. Фишка может отъехать назад, попав на несчастливое поле, или наоборот — проскочить несколько полей, или заработать для хозяина внеочередной бросок.

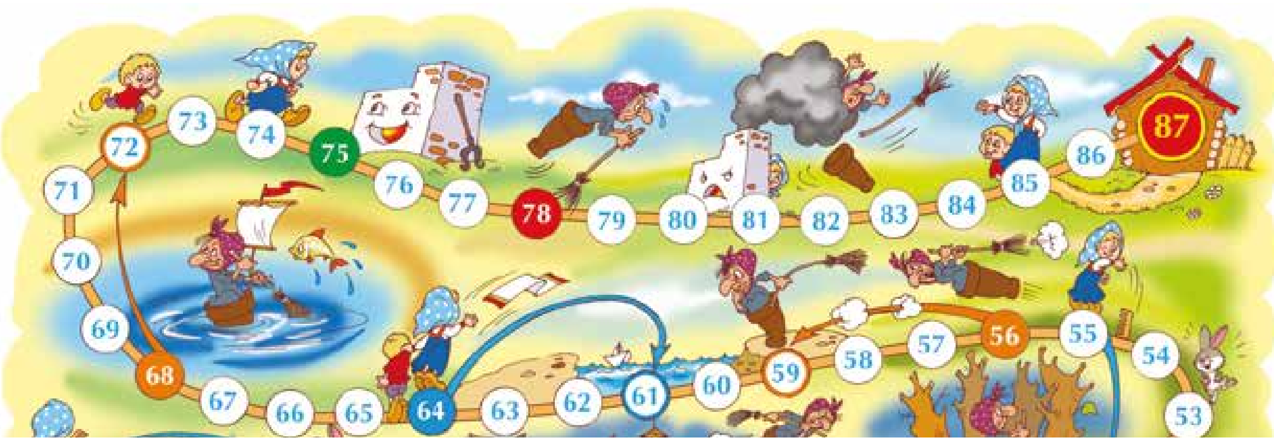
Предположим, что мы играем в такую игру, но без счастливых или несчастливых полей. Самые простые и естественные вопросы: «С какой вероятностью фишка в какой-то момент остановится на поле с номером n? Все ли поля равновероятны?»

Задача легко формализуется. Назовем *стоп-числом* номер поля, где остановилась фишка, то есть число, которое в какой-то момент стало суммой выпавших очков. Нужно найти вероятность p_n события «число n является стоп-числом».

Задача 1. Какова вероятность p_n того, что при последовательных бросаниях правильной игральной кости сумма очков в какой-то момент станет в точности равна n?

Ответ: $p_n = \dfrac{7^{n-1}}{6^n}$ при $n \le 6$ и $p_n \to \dfrac{2}{7}$ при $n \to \infty$.

Интуитивное решение. Поскольку каждый бросок увеличивает сумму в среднем на 3,5, то



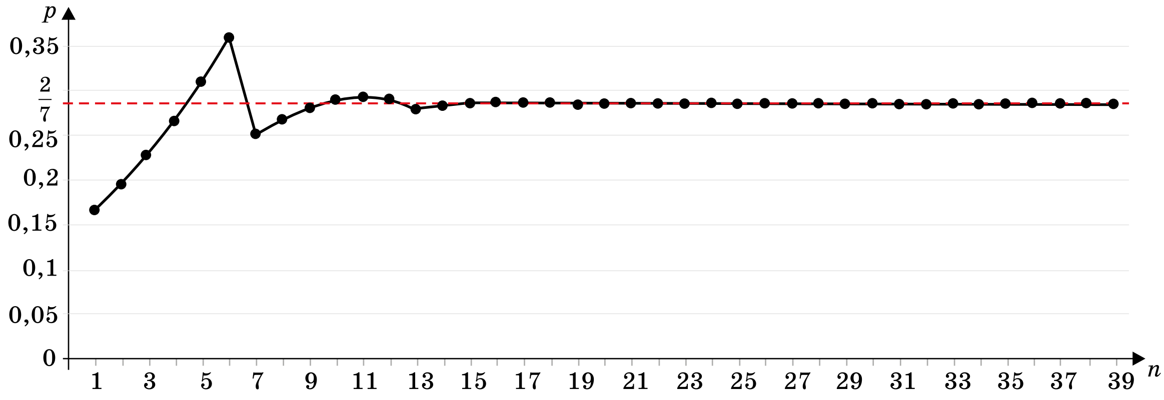


Рис. 1. Вероятности стоп-чисел

стоп-числами окажутся в среднем два из каждых семи чисел. Это рассуждение дает разумный ответ: вероятность каждого числа оказаться стоп-числом близка к $\frac{2}{7}$. Но это верно только для чисел, удаленных от начала игры, когда игра «уже не помнит», что там было вначале.

Точное решение. Уже зная приблизительную вероятность $\frac{2}{7}$ для больших чисел, попробуем понять, как эта вероятность формируется по мере удаления фишек от начала игры. Рассмотрим по очереди возможные результаты первого броска.

Если первый бросок дал 1, то число n будет стоп-числом только в том случае, если $(n-1)$ тоже стоп-число: сумма очков при всех бросках, за исключением первого, должна равняться $(n-1)$.

Если первый бросок дал 2, то число n окажется стоп-числом только в том случае, если число $(n-2)$ также является стоп-числом.

Так обстоит дело со всеми исходами первого броска: если он дал k очков ($k = 1, 2, ..., 6$), то n будет стоп-числом только в том случае, если $(n-k)$ также стоп-число.

Эти рассуждения и формула полной вероятности дают равенство

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}p_{n-2} + \frac{1}{6}p_{n-3} + \frac{1}{6}p_{n-4} + \frac{1}{6}p_{n-5} + \frac{1}{6}p_{n-6} =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k}. \qquad (1)$$

Множитель $\frac{1}{6}$ в первом слагаемом — это вероятность того, что первый бросок дал одно очко, множитель $\frac{1}{6}$ во втором слагаемом — вероятность двойки при первом броске и так далее.

Известно, что последовательность p_n можно представить как сумму геометрических прогрессий с малыми знаменателями (один в точности равен 1, а остальные меньше единицы по модулю). Поэтому рекурсия имеет пределом некоторое число, которое, как мы понимаем, должно равняться $\frac{2}{7}$.

Но получить такое представление непросто: для этого нужно решить характеристическое уравнение 6-й степени, которое совершенно не желает решаться алгебраически. Вместо этого воспользуемся прямым подсчетом. Чтобы понять, как ведут себя вероятности p_n, зададим начальные условия рекурсии:

$$p_{-5} = p_{-4} = p_{-3} = p_{-2} = p_{-1} = 0,\ p_0 = 1.$$

Это естественное предположение: отрицательной сумма быть не может, а нулевой она является с вероятностью $p_0 = 1$ до того, как кубик брошен первый раз. Тогда

$$p_1 = \frac{1+0+0+0+0+0}{6} = \frac{1}{6},$$

$$p_2 = \frac{\frac{1}{6}+1+0+0+0+0}{6} = \frac{7}{6^2}$$

и т.д.

С помощью формулы суммы геометрической прогрессии мы получаем, что при $n \le 6$

$$p_n = \frac{1}{6}\left(\frac{7^0}{6^1} + \frac{7^1}{6^2} + \ldots + \frac{7^{n-2}}{6^{n-1}} + 1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} - 1}{\frac{7}{6} - 1} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} - 1 + 1\right) = \frac{7^{n-1}}{6^n}.$$

Таким образом, до $n \le 6$ вероятности p_n образуют растущую геометрическую прогрессию, которая достигает наибольшего значения при $n = 6$. Ясно, что долго так продолжаться не может, иначе вероятность превзойдет единицу. И действительно, уже при $n = 7$ эта закономерность нарушается, поскольку в сумме (1) первое слагаемое $p_0 = 1$ уступает место слагаемому $p_1 = \frac{1}{6}$. В результате $p_7 < p_6$. Затем снова рост до $n = 11$. Дальше происходят затухающие колебания вероятностей с периодом 5–6 шагов. Любопытно посмотреть на график этой последовательности на рисунке 1, точки для наглядности соединены отрезками.

Колебания быстро затухают и, начиная где-то с $n = 17$, уже практически незаметны, вероятности быстро стабилизируются около $\frac{2}{7}$ (видно, что около 0,285, но на самом деле мы уверены, что это $\frac{2}{7}$). Это и есть эффект «забывания»: при больших n игра почти «не помнит» свое начало.

Решение с помощью MS Excel показано на рисунке 2. Именно с помощью этой таблицы и построен график на рисунке 1. Максимум в точке $n = 6$ выделен жирным шрифтом, а следующий максимум 11 не поместился на рисунке.

	A	B	C	D
1	**Задача о настольной игре**			
2		Вероятности стоп-чисел		
3				
4		n=	p_n=	Отличие от 2/7
5		-5	0	
6		-4	0	
7		-3	0	
8		-2	0	
9		-1	0	
10		0	1	0,7142857
11		1	0,16666667	-0,1190476
12		2	0,19444444	-0,0912698
13		3	0,22685185	-0,0588624
14		4	0,26466049	-0,0210538
15		5	0,30877058	0,0230563
16		**6**	**0,36023234**	0,0745181
17		7	0,2536044	-0,0321099
18		8	0,26809402	-0,0176203
19		9	0,28036895	-0,0053453
20		10	0,28928846	0,0035742

Рис. 2. Страница с расчетом вероятностей стоп-чисел

Итак, если вы решили составить для каких-нибудь детей настольный квест с кубиком и фишками и хотите сделать его повеселее, устройте первое приключение как раз на поле 6, а следующее — на поле 11.

Математическое ожидание числа бросков

Интересно посмотреть на «трудозатраты игрока», нужные для того, чтобы достичь поля с номером n. В случае с кубиком для этого потребуется от $\frac{n}{6}$ с округлением до целого вверх (если невероятно повезет) до n бросков (при столь же невероятном невезении). А в среднем?

Задача 2. Найти математическое ожидание числа бросков, сделанных к моменту, когда сумма очков впервые достигнет или превысит число n.

Ответ: $\frac{2}{7}n + \frac{10}{21} + a_n$, где $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Решение. Рано или поздно сумма очков достигнет числа n или перескочит это число, если оно не окажется стоп-числом. Число бросков, которые сделаны к этому моменту, обозначим X_n. Ясно, что это случайная величина: $\frac{n}{6} \le X_n \le n$, значения которой могут меняться от $\frac{n}{6}$ до n. Нужно найти $\mathrm{E}\,X_n$. Для краткости обозначим это число m_n и введем шесть случайных величин I_k по следующему правилу:

$$I_1 = \begin{cases} 1, \text{ если 1-й бросок дал 1 очко,} \\ 0, \text{ если иначе,} \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} 1, \text{ если 1-й бросок дал 2 очка,} \\ 0, \text{ если иначе,} \end{cases}$$

и т.д.

Такие случайные величины называют *бинарными,* поскольку они принимают только два значения: 0 и 1. Еще их называют *индикаторами* событий, поскольку они указывают, произошло событие или нет. Например, индикатор I_1 указывает на событие «при первом броске случилась единица», а индикатор I_3 указывает на событие «первый бросок дал 3 очка».

Тогда

$$X_n = 1 + I_1X_{n-1} + I_2X_{n-2} + I_3X_{n-3} + I_4X_{n-4} + I_5X_{n-5} + I_6X_{n-6}. \quad (2)$$

Проверьте, что равенство составлено без обмана. Здесь случайная величина X_{n-k} означает число бросков, не считая первого, потребовавшихся для того, чтобы сумма стала больше или равна $(n - k)$. Единица в начале нужна, чтобы учесть первый бросок.

Осталось перейти в равенстве к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}\,X_n = 1 + \mathrm{E}\,(I_1X_{n-1}) + \mathrm{E}\,(I_2X_{n-2}) + \ldots + \mathrm{E}\,(I_6X_{n-6}). \quad (3)$$

Величины I_k и X_{n-k} независимы, поскольку индикатор I_k относится только к первому броску, а случайная величина X_{n-k} относится ко всем последующим броскам, но не к первому. А для независимых величин математическое ожидание произведения равно произведению ожиданий. Значит,

$$\mathrm{E}\,(I_kX_{n-k}) = \mathrm{E}\,I_k\,\mathrm{E}\,X_{n-k} = \mathrm{E}\,I_k \cdot m_{n-k}.$$

Чтобы найти математическое ожидание индикаторов, составим их распределение. Все они распределены одинаково по закону Бернулли: *

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

А значит,

$$\mathrm{E}\, I_k = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Равенство принимает вид

$$m_n = 1 + \frac{1}{6}\left(m_{n-1} + m_{n-2} + \ldots + m_{n-6}\right) = 1 + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} m_{n-k}. \qquad (4)$$

Оно мало чем отличается от (1): вместо вероятностей — математические ожидания и еще есть постоянное слагаемое 1. Разумно предположить, что число бросков зависит от числа n приблизительно линейно (например, чтобы достичь вдвое более удаленного поля, потребуется примерно вдвое больше бросков). Поэтому разумно искать решение уравнения в виде $m_n = bn + c + a_n$, где последовательность a_n бесконечно малая. Подставим это выражение в (4):

$$bn + c + a_n = 1 + \frac{1}{6}\big(b(n-1) + c + a_{n-1} + b(n-2) + c + a_{n-2} +$$

$$+ \ldots + b(n-6) + c + a_{n-6}\big) = 1 + \frac{1}{6}\big(6bn - b(1+2+\ldots+6) +$$

$$+ 6c + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-6}\big) =$$

$$= 1 + bn - \frac{7}{2}b + c + \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-6}}{6}.$$

Вычтем $(bn + c)$ из обеих частей:

$$a_n = 1 - \frac{7}{2}b + \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-6}}{6}.$$

Устремив n к бесконечности, мы добьемся того, что все члены, кроме постоянных, устремятся к нулю: $0 = 1 - \frac{7}{2}b$, откуда $b = \frac{2}{7}$, и это нас почему-то не удивляет. Таким образом, чтобы достичь поля n, игроку в среднем требуется

$$\mathrm{E}\, X_n = \frac{2}{7}n + c + a_n \text{ бросков.}$$

Однако остается вопрос, чему равняется c и как быстро сходится к нулю последовательность a_n. Самый простой способ — это снова составить электронную таблицу (рис. 3) и посмотреть.

Для рекурсии возьмем следующие начальные условия: $m_n = 0$ при $n \le 0$ и $m_1 = 1$, поскольку сумма очков станет не меньше единицы при первом же броске.

* Распределение бинарной случайной величины часто называют распределением Бернулли и обозначают буквой *B*. Можно записать, что $I_k \sim B\left(\frac{1}{6}\right)$. Число в скобках – параметр распределения – равен вероятности того, что $I_k = 1$.

	A	B	C	D	E
1	Задача о настольной игре				
2		Математическое ожидание числа бросков			
3					
4		n=	EX_n=	2/7*n+10/21	Модуль разности
5		-4	0		
6		-3	0		
7		-2	0		
8		-1	0		
9		0	0		
10		1	1	0,761904762	0,238095238
11		2	1,166666667	1,047619048	0,119047619
12		3	1,361111111	1,333333333	0,027777778
13		4	1,587962963	1,619047619	0,031084656
14		5	1,852623457	1,904761905	0,052138448
15		6	2,161394033	2,19047619	0,029082158
16		7	2,521626372	2,476190476	0,045435896
17		8	2,775230767	2,761904762	0,013326005
18		9	3,043324784	3,047619048	0,004294264
19		10	3,323693729	3,333333333	0,009639604
20		11	3,61298219	3,619047619	0,006065429
21		12	3,906375312	3,904761905	0,001613408
22		13	4,197205526	4,19047619	0,006729335
23		14	4,476468718	4,476190476	0,000278242

Рис. 3. Страница с расчетом математического ожидания числа бросков

Поясним рисунок 3. Если кость брошена ровно 4 раза, то ожидание суммы выпавших очков равно 4 • 3,5 = 14. Но для достижения суммы 14 требуется в среднем не 4 броска, а

$$\frac{2}{7} \cdot 14 + c + a_{14} = 4 + c + a_{14} \text{ бросков,}$$

то есть 4 «с хвостиком». Этот хвостик (*избыток*) и есть то самое неизвестное слагаемое $(c + a_{14})$, которое примерно равно 0,476 (см. рис. 3). Природу избытка понять нетрудно: 14 окажется стоп-числом с вероятностью около $\frac{2}{7}$. А с вероятностью $\frac{5}{7}$ фишка перескочит поле 14, не остановившись на нем. Вот на этот весьма вероятный «перескок» и расходуются избыточные броски (в среднем).

Если «поиграть» в MS Excel с числами, посмотреть, как себя ведут избытки, то появляется гипотеза, что они довольно быстро сходятся к числу $\frac{10}{21}$. Эта гипотеза совершенно справедливая, и в столбце E видно, что разность между $\mathrm{E}\, X_n$ и $\frac{2}{7}n + \frac{10}{21}$ стремительно исчезает. Значит, можно рассчитывать на то, что уже при не очень больших n в типичной игре (при умеренном везении и невезении игрока) фишка достигает поля с номером n через

$$\mathrm{E}\, X_n = \frac{2}{7}n + \frac{10}{21} \text{ бросков.}$$

Если читателю все же любопытно, откуда берется странное число $\frac{10}{21}$, то он может продолжить чтение.

Почему избыток равен $\frac{10}{21}$?

Задача 3. Найти число c в равенстве

$$\mathrm{E}\,X_n = \frac{2}{7}n + c + a_n. \qquad (5)$$

Ответ: $c = \frac{10}{21}$.

Решение. Предположим, что n настолько велико, что игра «не помнит», как развивались события вначале (мы знаем, что для этого вполне достаточно считать, что $n > 17$). Это значит, что вероятность каждого числа вблизи числа n оказаться стоп-числом неотличима от $\frac{2}{7}$. Это означает, в частности, что в последовательности математических ожиданий (5) бесконечно малый член a_n можно отбросить:

$$\mathrm{E}\,X_n = \frac{2}{7}n + c.$$

Тот, кто сомневается, что так можно сделать, пусть вообразит, что игра началась в «минус бесконечности» и игроки играют уже бесконечно долго. Тогда вероятности каждого числа оказаться стоп-числом в точности равны $\frac{2}{7}$, а математическое ожидание числа бросков, отсчитываемых от любого наперед выбранного поля до достижения некоторого поля с большим номером n, является сугубо арифметической прогрессией с постоянной разностью $\frac{2}{7}$.

Рассмотрим внимательно момент, когда сумма впервые достигла или превысила n (при этом сделано, как мы знаем, X_n бросков). Непосредственно *до того, как это случилось,* фишка стояла на одном из полей $(n-1)$, $(n-2)$, ..., $(n-6)$, причем все эти варианты мы считаем равновозможными*, поскольку n велико. Значит, вероятность каждого варианта равна $\frac{1}{6}$.

Теперь добавим последний бросок, в результате которого сумма стала больше или равна числу n.

Если фишка стояла на поле $(n-1)$, то последний бросок мог дать любое число очков от 1 до 6. Если фишка стояла на поле $(n-2)$, то последний бросок мог дать любое число от 2 до 6. И так далее. Удобно представить возможные комбинации в таблице (рис. 4). В этом случайном опыте число элементарных событий равно 21, а вероятность каждого равна $\frac{1}{21}$.

* Тем, кто так и не согласился отбросить бесконечно малое слагаемое a_n, в этом месте предлагаем успокоиться. Считайте, что оно есть, но тогда придется взять в расчет различия между вероятностями того, что числа от $(n-6)$ до $(n-1)$, окажутся стоп-числами (см. задачу 1). Эти два малых искажения компенсируют друг друга. Мы же предпочтем «бесконечно удаленный вариант»: все исходы равновозможны, а $a_n = 0$.

Стоп-число перед последним броском	Последний бросок 1	2	3	4	5	6
$n-1$	$k=0$	1	2	3	4	5
$n-2$		0	1	2	3	4
$n-3$			0	1	2	3
$n-4$				0	1	2
$n-5$					0	1
$n-6$						0

Рис. 4. Таблица возможных комбинаций «предпоследняя сумма и число очков при последнем броске»

Наибольшее возможное число сделанных бросков равно n: $X_n \le n$. Введем обозначения Y_j для числа очков, выпавших при j-м броске, и индикатор I_j для броска с номером j, который равен 1 только в том случае, если сумма очков, выпавших при всех предыдущих бросках от 1-го до $(j-1)$-го, меньше, чем n. Тогда можно считать, что бросков ровно n, просто индикаторы несостоявшихся бросков равны нулю.

Составим равенства:

$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = X_n$ (общее число бросков)

и $\qquad (6)$

$I_1Y_1 + I_2Y_2 + \ldots + I_nY_n = n + k$ (общая сумма очков),

где k — «перебор», то есть случайное число, на которое сумма превысила число n. Очевидно, $0 \le k \le 5$. Разберитесь в том, как составлены эти равенства. Добавим в каждую клетку на рисунке 4 соответствующее значение k.

Теперь перейдем в равенстве к математическим ожиданиям. При этом учтем, что величина Y_j — число очков, выпавших при отдельном броске, и она ни от чего не зависит, поскольку кубик не помнит, сколько раз его уже бросали, и не знает, сколько раз еще собираются бросать, а даже если бы знал, то это не повлияло бы на его поведение.

Независимость величин I_j и Y_j можно объяснить по-другому: величина I_j зависит только от того, достигнута ли сумма n при предыдущих $(j-1)$ броске или нет, а величина Y_j относится именно к j-му броску, но никак не к предыдущим. Так или иначе получается

$$\mathrm{E}\,I_1 \cdot \mathrm{E}\,Y_1 + \mathrm{E}\,I_2 \cdot \mathrm{E}\,Y_2 + \ldots + \mathrm{E}\,I_n \cdot \mathrm{E}\,Y_n = n + \mathrm{E}\,k.$$

Все $\mathrm{E}\,Y_j$ равны 3,5. Поэтому

$$3{,}5(\mathrm{E}\,I_1 + \mathrm{E}\,I_2 + \ldots + \mathrm{E}\,I_n) = n + \mathrm{E}\,k.$$

Выносим оператор математического ожидания за скобки:

$$3{,}5 \cdot \mathrm{E}\,(I_1 + I_2 + \ldots + I_n) = 3{,}5 \cdot \mathrm{E}\,X_n = n + \mathrm{E}\,k;$$

$$3{,}5\left(\frac{2}{7}n + c\right) = n + \mathrm{E}\,k, \quad c = \frac{2}{7}\mathrm{E}\,k.$$

Осталось найти $\mathrm{E}\,k$, что несложно сделать, разглядывая рисунок 4:

$$\mathrm{E}\,k = 0\cdot\frac{6}{21} + 1\cdot\frac{5}{21} + 2\cdot\frac{4}{21} + 3\cdot\frac{3}{21} + 4\cdot\frac{2}{21} + 5\cdot\frac{1}{21} =$$

$$= \frac{5+8+9+8+5}{21} = \frac{5}{3}.$$

Тогда

$$c = \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{21}.$$

Разумеется, избыток стремится к $\frac{10}{21}$ только при бросании шестигранной кости. Если бросать кость с другим числом граней, то избыток будет другим. Каким? Оказывается, при увеличении числа граней избыток будет стремиться к $\frac{2}{3}$ и будет в точности равен $\frac{2}{3}$ для непрерывного случая, когда игральная кость уступит место непрерывному случайному выбору действительного числа из отрезка [0; 1]. Более точно: когда сумма случайных слагаемых, непрерывно и равномерно распределенных на отрезке [0; 1], при добавлении очередного слагаемого достигает числа x, число слагаемых в этой сумме в среднем оказывается равно $2x+\frac{2}{3}$. Эту тему мы продолжим в следующей статье: «Задача о варенье».

Более подробно о растущих суммах равномерных слагаемых и их свойствах можно прочитать в журнале «Математическое просвещение» (серия 3, вып. 24, 2019 г., с. 101–120).

Задачи для самостоятельного решения

1. После 6 и 11, какое число оказывается следующим в списке наиболее вероятных стоп-чисел?

2. Напишите формулу и составьте таблицу в MS Excel для вычисления вероятностей стоп-чисел для октаэдральной правильной кости (8 равновероятных граней с очками от 1 до 8). Найдите вероятность того, что такая кость при последовательных бросках когда-нибудь даст сумму 8; сумму 256.

3. Сколько потребуется в среднем бросков игрального кубика, чтобы сумма выпавших очков достигла или превысила число 2022?

4. Напишите формулу и составьте таблицу в MS Excel для вычисления математического ожидания числа бросков, нужных для достижения суммы 2022 при бросании: а) правильной октаэдральной кости; б) правильной додекаэдральной кости (12 равновозможных граней).

5. Предположим, что у нас есть правильная n-гранная кость. Сколько потребуется в среднем бросков, чтобы достичь суммы n? Найдите предельное значение при $n \to \infty$.

Ответы будут опубликованы в следующем номере, а с решением задач можно ознакомиться на сайте https://ptlab.mccme.ru/Street_problems.

Окончание. Начало на с. 36.

Когда началось дистанционное образование, сразу посыпались многочисленные жалобы от родителей на то, как много времени ребенок проводит за компьютером. Но после онлайн-уроков он где будет? Думаете, на лужайке? Нет, он будет сидеть в соцсетях. И что вы с этим сделаете? Образование XXI века — это новый мир. И мы в него уже попали. Это факт, нравится он нам или нет».

По ее словам, сейчас очень много сказок и фейков о цифровом образовании. А надежной информации о том, что вредно, а что полезно, и самое главное — в каких дозах, этого сегодня нет, потому что еще нет исследований, которые бы длились много лет.

Об этом говорил и научный руководитель Лаборатории нейронаук и поведения человека Андрей Курпатов.

«Мы проводили исследования среди старшеклассников, которые показали: обучение с помощью качественных онлайн-курсов может дать даже лучший результат, чем офлайн-уроки. Но при условии, что в онлайне сочетается и объяснение материала, и увлекающий игровой момент, и проверка знаний, — говорит доктор Курпатов. — У детей меняется восприятие. Ученым, методистам, педагогам предстоит большая работа: подготовить контент так, чтобы обучение действительно стало эффективным».

По его словам, сегодня более 40 процентов детей в возрасте до 10 лет практически постоянно находятся в онлайне. Но если отпустить маленького ребенка в свободное «цифровое потребление», он будет выбирать и смотреть самые примитивные и даже вредные для мозга развлекающие ролики. Поэтому контент действительно очень важен. Онлайн-обучение может быть и интересным, и полезным. Но нужно учитывать возраст ребенка и четко понимать: что можно дать в «цифре», а что — нет.

«Что важно? Мозг человека формируется до 25 лет, — рассказал Андрей Курпатов. — У ребенка, когда он взаимодействует с миром, формируются базовые нейронные сети, которые будут отвечать за концентрацию внимания, за способность к целенаправленной деятельности, за мышление, социальные отношения, умение работать в команде, принимать решения и расставлять приоритеты… И все это должно формироваться в офлайне, в процессе живого общения с родителями, друзьями, учителями».