И. ВЫСОЦКИЙ,
Н. СОШИТОВА,
г. Москва

# XIV ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

Рисунки Николая Крутикова

Интернет-олимпиаду по теории вероятностей и статистике с 2008 года проводит Московский центр непрерывного математического образования. Проходит она в два тура. Первый тур — пригласительный; он содержит девять относительно несложных задач, дающих школьникам возможность попробовать свои силы. Участие индивидуальное, но чаще всего организацию своих участников берут на себя школы. В этом случае задания рассылаются через систему Статград, а проверяют работы школьников учителя. Оргкомитет проверяет работы только тех участников, кто решил участвовать без посредничества школы.

Основной тур проводится на протяжении нескольких недель. В этом году он проходил с 21 декабря по 24 января. Здесь уже участие школ регламентом не предусмотрено. Обычно мы получаем около сотни заявок на участие, но выполненных работ школьники присылают намного меньше: сказывается сложность заданий. Задания действительно по большей части непростые и рассчитаны на то, что участник в течение длительного времени разбирается, думает, спрашивает и читает.

Неожиданно для самого оргкомитета традицией стало то, что ежегодно задания основного тура содержат три эссе на разнообразные темы и 16 задач. Конкурс эссе и конкурс задач — это разные конкурсы, результаты по которым подводятся независимо один от другого. Можно получить призовое место в конкурсе эссе, не решив ни одной задачи, и наоборот — стать призером конкурса задач, проигнорировав эссе.

В нынешнем учебном году темы эссе были непростые.

Что такое «взаимовыгодная лотерея», и возможно ли такое?

Эссе о нетранзитивных костях ставило вопрос: можно ли нагрузить игральные кости $A$, $B$ и $C$ так, чтобы выигрыши при длительной игре распределились заранее заданным образом.

Третье эссе возникло из методической практики: иногда учителя, моделируя на уроке геометрическое распределение с помощью игральных костей, просят школьников бросать кость в течение некоторого времени или «до хлопка в ладоши». В ходе бросаний нужно записывать, сколько раз выпала шестерка и сколько бросков потребовалось на очередную шестерку. Затем учитель строит распределение величины «количество серий бросков определенной длины, окончившихся шестеркой». Действительно ли полученное распределение моделирует геометрическое распределение? Если нет, то какое и почему?

Когда мы предлагаем эссе, мы имеем в виду, что даже если школьник ничего не напишет, то он, возможно, познакомится с новым для себя объектом, задумается. Обычно ничего выдающегося мы не ждем. Редко нам присылают интересные эссе, еще реже — очень хорошие эссе. В этом году мы получили два крайне интересных эссе от Александры Нестеренко из 8-го класса.

Первое эссе Александры — о нетранзитивных костях. Нетранзитивные кости немного парадоксальный объект, напоминающий игру «камень-ножницы-бумага». В этой известной игре камень всегда тупит ножницы, которые всегда режут бумагу, в которую всегда можно завернуть камень. При игре в нетранзитивные кости тоже происходит выигрыш по кругу, но не всегда, а с вероятностью более $\frac{1}{2}$. Оказывается, можно так расставить числа на гранях игральных костей $A$, $B$ и $C$, что игрок с костью $A$, скорее всего, выигрывает у игрока $B$, $B$ выигрывает у $C$, а $C$ — у $A$. При этом отношения их ожидаемых выигрышей могут широко варьироваться, но все же не очень широко.

Саша Нестеренко нашла границы области отношений математических ожиданий выигрышей, указала способ конструирования нетранзитивных костей по заданным ожиданиям выигрышей игроков и показала, что сумма вероятностей выигрышей на всех трех костях не может быть больше, чем $\frac{17}{9}$. Это весьма сильные результаты.

Второе эссе Александры Нестеренко — об искаженном геометрическом распределении — также превзошло все наши ожидания. С присущей ей интуицией Саша нашла верную формулу вероятности, опираясь на одну-единственную известную ей точку неизвестного распределения и весьма эфемерные соображения о том, как оно должно себя вести по сравнению с истинно геометрическим.

Не желая утомлять читателей непростым математическим текстом восьмиклассницы Александры, скажем лишь, что полные тексты эссе можно найти на сайте «Вероятность в школе»: http://ptlab.mccme.ru/node/1702.

Мы всегда компонуем основной тур так, чтобы в нем оказались как простые задачи, так и сложные, задачи на анализ данных и задачи на комбинаторную вероятность, задачи на геометрическую вероятность и на построение рекурсий, в общем, стараемся охватить как можно более широкий спектр и по сложности, и по тематике.

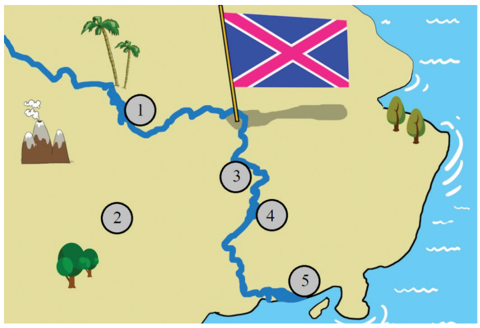
Рассмотрим и кратко прокомментируем несколько задач прошедшего основного тура. Включим в разбор самые простые задачи, которые решили почти все участники, и гораздо более сложные, в том числе задачу, которую не решил никто, хотя, казалось бы, она не так уж и сложна. Полный текст задач и решений, а также задачи олимпиад предыдущих лет можно найти на странице олимпиады: http://ptlab.mccme.ru/node1702.

Ждем ваших учащихся на XV Олимпиаде, которая пройдет следующей осенью и зимой.

## Разбор заданий

**Города Анчурии.** (*От 6-го класса; 1 балл*) В Анчурии одна река Рио-Бланко, которая берет начало где-то в горах и впадает в океан, и всего пять городов: Сан-Матео, Аласан, Коралио, Альфоран и Солитас.

На рисунке показана карта Анчурии, но названий городов нет, города отмечены цифрами. В таблице даны некоторые общие сведения обо всех пяти городах. Определите, где какой город на карте.



Точная карта Анчурии

### Города Анчурии

| Город | Площадь (мили$^2$) | Население (тыс. чел.) | Основная статья дохода | Высота центра города над уровнем моря (футы) | Источник пресной воды |
|---|---|---|---|---|---|
| Сан-Матео | 18,3 | 120,2 | Сувенирная промышленность | 117 | Река Рио-Бланко |
| Коралио | 8,4 | 30,3 | Экспорт обуви | 5 | Река Рио-Бланко |
| Аласан | 12,0 | 45,9 | Банановодство | 349 | Колодцы и скважины |
| Альфоран | 9,4 | 19,6 | Доходы от проведения турниров по шашкам | 593 | Река Рио-Бланко |
| Солитас | 4,1 | 8,4 | Нет доходов | 232 | Река Рио-Бланко |

*Комментарий.* Это шуточная задача, которую решили почти все. Мы не ожидали, что, помимо действительно существенных данных об источниках пресной воды и высоте над уровнем моря, многие участники успешно оперировали информацией, которую мы дали (как мы думали) лишь для отвлечения внимания. Один школьник сделал далеко идущие предположения на основании того, что в Коралио развит обувной экспорт. Действительно, если этот город не на берегу океана, как он будет успешно конкурировать в международной торговле? У этого школьника статистическое мышление развито.

**Экспериментальный учебник.** (*От 6-го класса; 2 балла*) При испытании нового учебника по математике в эксперименте приняли участие примерно одинаковые по численности параллели седьмых классов из двух школ. В каждой школе часть семиклассников училась по экспериментальному учебнику, а часть — по обычному учебнику. В конце учебного года был проведен итоговый тест, который показал, насколько хорошо семиклассники освоили учебный материал.

Результаты теста в 1-й школе

| | Учились по экспериментальному учебнику | Учились по обычному учебнику |
|---|---|---|
| Выполнили тест хорошо | 30% | 15% |
| Выполнили тест плохо | 35% | 20% |
| Доля тех, кто выполнил тест хорошо | 0,46 | 0,43 |

Результаты теста во 2-й школе

| | Учились по экспериментальному учебнику | Учились по обычному учебнику |
|---|---|---|
| Выполнили тест хорошо | 20% | 45% |
| Выполнили тест плохо | 10% | 25% |
| Доля тех, кто выполнил тест хорошо | 0,67 | 0,64 |

В обеих школах доля тех, кто выполнил тест хорошо, оказалась выше в группе тех, кто учился по экспериментальному учебнику. Поэтому был сделан вывод, что новый учебник обеспечивает более высокое качество образования. Только Рассеянный Ученый выступил против нового учебника и ко всеобщему удивлению заявил, что те, кто учился по новому учебнику, сдали тест в среднем хуже, чем те, кто учился по старому. Кто прав?

*Комментарий.* Задача является «учебно-методической» формулировкой знаменитого парадокса Симпсона, который гласит, что иногда совокупность можно разбить на две нерепрезентативные группы так, что один и тот же статистический вывод, верный относительно каждой группы в отдельности, может оказаться неверным для всей совокупности. Классическая формулировка: существует лекарство, которое полезно мужчинам и полезно женщинам, но вредно людям.

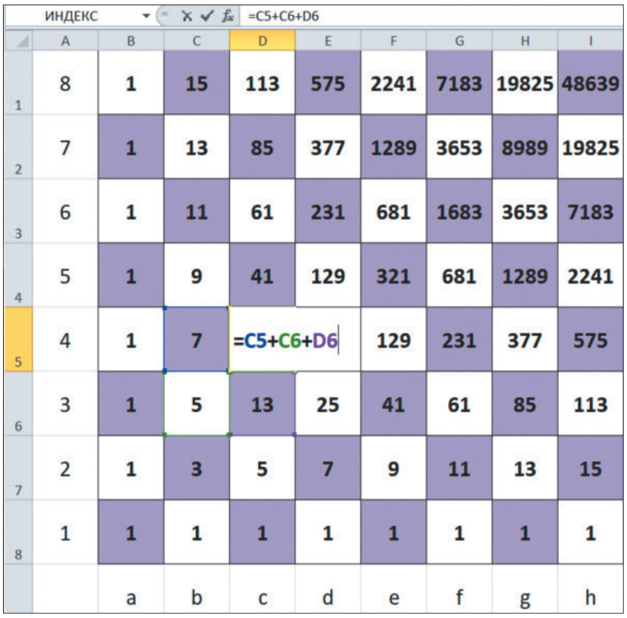
**Путь короля.** (*От 7-го класса; 2 балла*) Шахматный король находится на поле a1 шахматной доски и хочет пройти на поле h8, двигаясь вправо, вверх или вправо-вверх. Сколькими способами он может это сделать?

*Решение.* Обозначим $S_{m,\ n}$ число возможных способов дойти из левого нижнего поля в правое верхнее на доске размером $m \times n$ ($m$ полей по горизонтали). Нас интересует $S_{8,\ 8}$. Построим рекуррентное соотношение: первый шаг можно сделать тремя способами — вправо, вверх или вправо-вверх. После первого шага задача сводится к аналогичной для доски меньших размеров. Получаем:

$$S_{m,\,n} = S_{m-1,\,n} + S_{m,\,n-1} + S_{m-1,\,n-1}.$$

Начальные условия: $S_{1,\,n} = 1$ и $S_{m,\,1} = 1$ для всех $m$ и $n$. В частности, $S_{1,\,1} = 1$, поскольку на доске размером $1 \times 1$ у короля только один «путь»: стоять и ничего не делать.

Вычисления легко провести в Excel.




| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 1 | 15 | 113 | 575 | 2241 | 7183 | 19825 | 48639 |
| 2 | 7 | 1 | 13 | 85 | 377 | 1289 | 3653 | 8989 | 19825 |
| 3 | 6 | 1 | 11 | 61 | 231 | 681 | 1683 | 3653 | 7183 |
| 4 | 5 | 1 | 9 | 41 | 129 | 321 | 681 | 1289 | 2241 |
| 5 | 4 | 1 | 7 | =C5+C6+D6 | | 129 | 231 | 377 | 575 |
| 6 | 3 | 1 | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | 85 | 113 |
| 7 | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | a | b | c | d | e | f | g | h |

*Ответ*: 48 639.

*Комментарий.* Несложная комбинаторная задача на естественное построение рекурсии и использование компьютера в расчетах.

**Буратино-статистик.** (*От 7-го класса; 2 балла*) Буратино каждый месяц играет в лотерею «6 из 45», устроенную Карабасом-Барабасом. В лотерее 45 пронумерованных шаров и в каждом тираже выпадает 6 случайных выигрышных шаров. Буратино заметил, что в каждом следующем тираже не бывает шаров, выпавших в предыдущем тираже: во втором тираже не было шаров из первого, в третьем — из второго и т.д.

Буратино не верит в события, вероятность которых меньше 0,01. Если происходит такое событие, то Буратино начинает подозревать неладное. После какого тиража Буратино начнет подозревать, что Карабас-Барабас жульничает?

*Решение*. Вероятность того, что во втором тираже не повторятся числа из первого, равна

$$a=\frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot\ldots\cdot 34}{45\cdot 44\cdot 43\cdot\ldots\cdot 40}=0{,}40056\ldots,$$

что чуть больше, чем 0,4.

Вероятность того, что повторений предыдущего тиража не будет во втором и в третьем тиражах, равна квадрату этого числа, то есть примерно $a^2$.

Вероятность отсутствия повторений в тиражах со второго по четвертый равна $a^3$ и так далее.

Пятая степень числа $a$ все еще больше, чем 0,01:

$$a^5>0{,}4^5=10^{-5}\cdot 2^{10}=0{,}01024,$$

а шестая уже меньше: $a^6=0{,}0041\ldots$

Значит, Буратино может обвинить Карабаса-Барабаса после того, как это явление повторится 6 раз, то есть после седьмого тиража.

*Ответ*: после седьмого.

*Комментарий*. Может показаться, что это задача по теории вероятностей. Но скорее это типичный пример проверки статистической гипотезы «Карабас-Барабас не жульничает». Осуществившаяся после седьмого тиража статистика настолько неправдоподобна, что эта гипотеза должна быть отвергнута при выбранном *решающем правиле* «Буратино не верит в события с вероятностью менее 0,01». Здесь иллюстрируется стандартное рассуждение о неправдоподобности следствия из сделанного предположения. Это обобщает обычное и привычное доказательство от противного. Просто мы приходим не к невозможному следствию, а к очень маловероятному. Результат тот же — предположение следует отвергнуть.

**Зимний лагерь.** (*От 8-го класса*) В зимнем лагере в комнате живут Ваня и Гриша. Каждый вечер они бросают жребий, кому гасить свет перед сном; дело в том, что выключатель около двери и проигравшему приходится идти к кровати в полной темноте, натыкаясь на стулья.

Обычно Ваня и Гриша бросают жребий без затей, но в этот раз Гриша придумал особенный жребий:

– Давай бросать монету. Если при каком-то четном броске выпадет орел, то дальше монету не бросаем: я выиграл. Если же при каком-то нечетном броске выпадет решка, то выиграл ты.

а) (*2 балла*) Какова вероятность выигрыша Гриши?

б) (*2 балла*) Найдите математическое ожидание числа бросков монеты до окончания жребия.

*Решение*. а) Будем считать, что орел при очередном броске дает единицу, а решка — ноль в дробной части двоичной дроби. Получается некоторое число $x$, представленное двоичной дробью. Например, если последовательность бросаний начинается ОРО, то получается двоичная дробь 0,101.

Очевидно, $0\le x\le 1$, при этом вероятность события $0\le x\le a$ равна $a$ при любом неотрицательном $a\le 1$ (попробуйте это строго обосновать).

Нетрудно видеть, что Гриша выиграет, только если последовательность бросков даст число $x$, которое больше, чем

$$0{,}10101010101\ldots=0+\frac{1}{2}+\frac{0}{4}+\frac{1}{8}+\frac{0}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

Вероятность этого равна $\frac{1}{3}$. Если полученная дробь меньше, чем $\frac{2}{3}$, то выигрывает Ваня. Событие «получится в точности $\frac{2}{3}$» имеет нулевую вероятность.

б) Успехом назовем бросок, при котором жребий решился, то есть выпадение орла при четном броске или выпадение решки при нечетном броске. Вероятность успеха при каждом отдельном броске равна 0,5. В силу независимости бросков математическое ожидание числа бросков равно 2.

*Ответ*: а) $\frac{1}{3}$; б) 2.

*Комментарий*. Разумеется, задача имеет решение, не привлекающее двоичную систему счисления. Однако мы решили дать задачу именно из-за такого красивого решения. Кстати, присмотревшись, легко понять, как с помощью монеты можно сделать жребий с заранее заданным соотношением шансов $a:b$; даже если числа $a$ и $b$ иррациональны, при этом математическое ожидание числа бросков монеты по-прежнему будет 2.

**Красное и черное.** (*От 8-го класса; 3 балла*) Банкомет (в некоторых карточных играх тот, кто сдает игрокам карты) по одной сдает игроку карты из хорошо перетасованной обычной карточной колоды. В любой момент, пока у банкомета еще остались карты, игрок может сказать «Стоп». После этого банкомет открывает еще одну карту. Если она красной масти, то игрок выигрывает, если черной, то проигрывает. Существует ли у игрока стратегия, при которой вероятность выигрыша больше 0,5?

*Решение.* Предположим, что такая стратегия существует, то есть игрок может определить оптимальный момент, когда нужно сказать «Стоп». Пусть в этот момент в колоде еще закрыты $r$ красных и $b$ черных карт. Тогда вероятность события «следующая карта красная» равна $\frac{r}{r+b}$. Изменим правило и скажем «Стоп» после следующей карты. Тогда игрок выиграет с вероятностью

$$\frac{r}{r+b}\cdot\frac{r-1}{r+b-1}+\frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b-1}=\frac{r(r+b-1)}{(r+b)(r+b-1)}=\frac{r}{r+b}.$$

Переход от исходной стратегии к стратегии «плюс одна» не меняет вероятности выигрыша. Получается, что если игрок может вычислить карту, после которой нужно сказать «Стоп», то он может сказать «Стоп» и позже в любой момент, например, перед последней картой. Но она с равными шансами может оказаться черной или красной. Значит, до начала игры выигрышной стратегии не существует.

Ответ: нет.

*Комментарий.* Сказанное не значит, что при определенном развитии событий вероятность не может оказаться больше 0,5. Мы доказали лишь то, что не существует общей стратегии, то есть стратегии, дающей преимущество до начала игры.

**Почтовые ящики.** В новом, только что заселенном многоквартирном доме рабочие повесили блок из 80 почтовых ящиков. Внутрь каждого ящика они положили кольцо с ключом и биркой с номером квартиры, но не позаботились о том, чтобы в каждом ящике лежал ключ от этого ящика. Они просто покидали ключи в ящики в случайном порядке. Ящики, разумеется, заперты.

Рассеянный Ученый, недавно поселившийся в квартире 37, обрадовался, увидев ящики, но консьержка сказала, что достать ключи она не может. Нужно идти в управляющую компанию, которая осуществляет прием граждан каждый третий понедельник месяца с 12.00 до 12.30.

Найдя в мусорной урне палочку (кто-то заказывал суши), Ученый с четвертой попытки сумел извлечь ключ из ящика № 37. Он рассуждал следующим образом: если это ключ от моего ящика, то все хорошо. Если нет, то я открою ящик, от которого этот ключ, ключ оставлю в замке, выну из ящика следующий ключ, открою им следующий ящик и так далее, пока не достану свой ключ.

а) (*От 8-го класса; 3 балла*) Докажите, что описанный алгоритм результативен, то есть Рассеянный Ученый найдет свой ключ.

б) (*От 9-го класса; 6 баллов*) Найдите математическое ожидание числа жильцов, которым придется ковырять в ящиках палочкой, если все они будут следовать алгоритму Рассеянного Ученого.

*Решение.* Почтовые ящики и ключи будем нумеровать так же, как квартиры. Нужно показать, что рано или поздно Ученый достанет ключ 37 от ящика 37.

Предположим противное — ни на каком шаге алгоритма Ученый не найдет свой ключ. Тогда после очередного открытого ящика новый найденный ключ — это ключ от закрытого ящика. Ведь ключи от всех открытых ящиков, кроме ящика Ученого, вставлены в замки и, по предположению, ключ — не от ящика Ученого. Значит, после каждого открытого ящика найдется закрытый, который можно открыть найденным ключом. Следовательно, число ящиков не ограничено. Противоречие.

Если мы начнем алгоритм Ученого с любого ящика, то рано или поздно мы к этому ящику и вернемся. Таким образом, разобьем все ящики на замкнутые циклы (так называемые «орбиты»), где в каждом ящике лежит ключ от следующего. Вероятность того, что, начав со случайного ящика, мы попадем на орбиту длины $k$ (то есть в цикл длины $k$), — это вероятность того, что ключ от первого открытого ящика найдется в $k$-м по счету. По правилу умножения, это вероятность не найти ключ от ящика 1 в первых $(k-1)$ ящиках, умноженная на вероятность того, что он в $k$-м (при условии того, что его нет во всех предыдущих):

$$p_k=\frac{79}{80}\cdot\frac{78}{79}\cdot\ldots\cdot\frac{80-(k-1)}{81-(k-1)}\cdot\frac{1}{80-(k-1)}=$$

$$=\frac{80-(k-1)}{80}\cdot\frac{1}{80-(k-1)}=\frac{1}{80}.$$

Таким образом, вероятность того, что случайно выбранный ящик окажется из «орбиты» длины $k$, не зависит от $k$ и равна $\frac{1}{80}$.

Обозначим $m_k$ математическое ожидание количества орбит длины $k$. Тогда математическое ожидание количества всех ящиков в орбитах длины $k$ равно $k \cdot m_k$, поскольку в каждой орбите длины $k$ ровно $k$ ящиков. Тогда вероятность того, что случайно выбранный ящик принадлежит орбите длины $k$, равна

$$\frac{k \cdot m_k}{80} = \frac{1}{80},$$

откуда

$$m_k = \frac{1}{k}.$$

Иными словами, получается в среднем один цикл длины 1, полцикла длины 2, треть цикла длины 3 и так далее — среднее число циклов длины $n$ равно $\frac{1}{n}$, а математическое ожидание числа всех циклов равно

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Полученная сумма называется $n$-м гармоническим числом и обозначается $H_n$. При $n = 80$ с помощью компьютера или калькулятора находим, что $H_n \approx 4{,}965$. Известно приближенное равенство

$$H_n = \ln n + \gamma ,$$

где $\gamma$ — константа Эйлера–Маскерони, равная пределу разности между гармоническими числами и натуральным логарифмом:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left( H_n - \ln n \right).$$

В практических расчетах можно полагать $\gamma$ равным 0,58. Если воспользоваться этой приближенной формулой, то получим, что среднее число жильцов, ковыряющих палочкой, приблизительно равно

$$\ln 80 + 0{,}58 \approx 4{,}962$$

*Комментарий.* Автор ключевой части приведенного решения — Александра Нестеренко, о которой мы уже упоминали в связи с эссе. Ее решение чуть лаконичнее, чем то, что предлагал оргкомитет. Впрочем, как отметил один из участников, первый пункт сразу вытекает из хорошо известного факта, что случайная перестановка распадается на конечное число циклов. Второй пункт сводится к поиску среднего числа этих циклов. Задача требует владения некоторой общематематической техникой, поэтому оценивается в совокупности в 9 баллов.

**Счастливые суммы.** (*От 8-го класса; 4 балла*) В лотерее «Счастливая сумма» всего $N$ шаров с номерами от 1 до $N$. Во время основного тиража случайным образом выпадает 10 шаров. Во время дополнительного тиража из этого же набора шаров случайно выбирают восемь шаров. Сумма номеров на выпавших шарах в каждом тираже объявляется счастливой суммой, а те игроки, кто эту сумму предсказал, получают выигрыш.

Может ли быть, что события $A$ «в основном тираже счастливая сумма равна 63» и $B$ «в дополнительном тираже счастливая сумма равна 44» равновероятны? Если да, то при каком условии?

*Решение.* В основном тираже всего возможно $C_N^{10}$ комбинаций, а в дополнительном — $C_N^8$ комбинаций. Обозначим $S_{63,\,10}$ количество комбинаций в первом тираже, при которых сумма равна 63. Слагаемые — различные натуральные числа от 1 до $N$. Если самое маленькое число равно 2 или больше, то сумма всех десяти слагаемых не меньше, чем

$$2 + 3 + \ldots + 11 = \frac{2 + 11}{2} \cdot 10 = 13 \cdot 5 = 65.$$

Значит, самое маленькое число равно 1. Отбрасывая в каждом слагаемом единицу, то есть вычитая из суммы 10, мы находим, что сумма 53 получена девятью различными натуральными слагаемыми, каждое из которых не превосходит числа $N$. Иными словами, способов получить сумму 63 десятью слагаемыми столько же, сколько способов получить сумму 53 девятью слагаемыми:

$$S_{63,\,10} = S_{53,\,9}.$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$S_{63,\,10} = S_{53,\,9} = S_{44,\,8}.$$

Теперь можно найти отношение вероятностей:

$$\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{S_{44,\,8} \cdot C_N^{10}}{C_N^8 \cdot S_{63,\,10}} = \frac{C_N^{10}}{C_N^8} =$$

$$= \frac{8!(N-8)!}{10!(N-10)!} = \frac{(N-8)(N-9)}{90}.$$

Найдем, при каких $N$ полученная дробь равна единице:

$$\frac{(N-8)(N-9)}{90} = 1,$$

откуда

$$N = 18.$$

*Ответ*: такое возможно, если в лотерее 18 шаров.

*Комментарий.* К сожалению, эту задачу не решил никто, хотя она, казалось бы, намного проще тех, которые оказались по зубам коллективному разуму участников. Это еще раз подтверждает известный педагогический постулат: субъективную сложность задачи предсказать невозможно.