ЕГЭ ЕГЭ

В.С. Шклярник

ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРИКУ И ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

ЕГЭ

ЕГЭ

Предисловие

Тема «Теория вероятностей» начинает занимать в школьной программе все большее место. Это связано с тем, что понятия вероятности и статистики очень широко встречаются в жизни. Поэтому они изучаются на таких специальностях, как физика, биология, экономика, социология, на всех инженерных специальностях. И если раньше с теорией и практическими задачами по теории вероятностей школьники знакомились лишь на факультативах и в классах с углубленным изучением математики, то теперь все выпускники 9-х и 11-х классов должны справляться с заданиями по этой теме на ОГЭ и ЕГЭ. А при продолжении обучения в колледжах и ВУЗах очень многим студентам предстоит изучить большой и сложный курс по теории вероятностей и математической статистике.

Данное учебное пособие предназначено для школьников 8–11 классов. В нем максимально просто и понятно изложены элементарные сведения из комбинаторики и теории вероятностей. Пособие содержит необходимые теоремы и формулы, а также достаточное количество задач, представляющих интерес для учащихся, включая задачи, встречавшиеся на школьных экзаменах. Важно, что приводятся полные решения всех задач.

Задачи, приводящие к основным понятиям, выделены жирным шрифтом. Задачи, иллюстрирующие применение формул и теорем, подчеркнуты.

Пособие может быть использовано не только школьниками, но и студентами для повторения важных начальных сведений по данной теме, учитывая, что большинство рассмотренных задач может предлагаться и в колледжах, и в ВУЗах на занятиях и контрольных работах.

Задачи, встречавшиеся на школьных экзаменах

1998 г. Варианты для классов с углубленным изучением математики.

1) В коробке 3желтых и 5 красных шаров. Из нее наугад вынули два шара. Найдите вероятность того, что шары одного цвета.

Решение. Количество благоприятных исходов (вынута пара желтых шаров или вынута пара красных шаров) m=C_3^2+C_5^2=3+10=13, общее количество исходов n = C_8^2 = 28, p = $\frac{13}{28}$.

2) В барабане лежали 2 синих, два красных и 3 белых шара. Все шары случайным образом выкатывались в лоток. Найдите вероятность того, что три белых шара будут лежать рядом.

Решение. Запишем какой-нибудь случай расположения шаров:

с б б б к с к.

Три белых шара, лежащие рядом, будем считать одним элементом. Тогда количество благоприятных исходов – это число перестановок из 5 элементов, среди которых есть две пары одинаковых: m = $\frac{P_5}{P_2 \cdot P_2}$ = 30, общее число исходов – это число перестановок из 7 элементов, среди которых есть три одинаковых и две пары одинаковых: n = $\frac{P_7}{P_3 \cdot P_2 \cdot P_2}$ = 210. Вероятность равна p = $\frac{1}{7}$.

2011 г. (сентябрь). Диагностическая работа.

1) У Пети в кармане лежат 6 монет: четыре монеты по 1 руб. и две монеты по 2 руб. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе монеты по 2 руб. лежат в одном кармане.

Решение.

I способ (с записью всех вариантов). Допустим, что все монеты разные, например, разных годов выпуска. Запишем благоприятные варианты для одного (правого) кармана (обе монеты по 2 руб. с одной монетой в 1 руб.):

2_1, 2_2, 1_1
1_2 4 благоприятных исхода для правого кармана
1_3 и столько же для левого,
1_4 m = 8.

При неблагоприятных исходах две монеты по 2 руб. лежат в разных карманах, например, в правом лежит 2_1 и две из четырех монеты по 1 руб. Количество пар монет по одному руб. $C_4^2 = 6$, всего 6 исходов с монетой 2_1 в правом кармане и столько же исходов с монетой 2_1 в левом кармане. Всего неблагоприятных исходов 12, общее количество исходов n = 8 +12 = 20, вероятность $p = \frac{8}{20} = 0{,}4$.

II способ (рациональный). Представим себе, что одна двухрублевая монета уже лежит в каком-то кармане. Тогда для второй двухрублевой монеты есть два благоприятных места в этом же кармане, а всего для нее осталось 5 возможных мест в двух карманах. $p = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

2012 г. (февраль). Репетиционный ЕГЭ.

1. Лена четырежды бросала игральный кубик. В сумме у нее выпало 7 очков. Найдите вероятность того, что при втором броске выпало 4 очка.

Решение. 7 очков при четырех бросках можно набрать в следующих вариантах: 4+1+1+1, 2+2+2+1, 3+2+1+1. Благоприятный исход только один: в первом наборе цифр четверка должна находиться на втором месте: 1 4 1 1.

Всего исходов:

при первом наборе цифр − 4 (четверка на любом месте),

при втором – 4 (единица на любом месте),

при третьем – число перестановок из 4 элементов, два из которых одинаковые: $\frac{4!}{2!} = 12$.

Итак, $n = 4 + 4 + 12 = 20$, $p = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

2. Галя трижды бросала кубик, в сумме у нее выпало 12 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 1 очко.

Решение.

Рассмотрим все варианты набора 12 очков при трех бросках кубика:

1 + 5 + 6 и 1 + 6 + 5 – это два благоприятных исхода, а всего $P_3 = 6$ комбинаций из этих цифр,

2 + 5 + 5 – 3 комбинации («2» меняет свое место),

2 + 4 + 6 – 6 комбинаций,

3 + 4 + 5 – 6 комбинаций,

3 + 3 + 6 – 3 комбинации,

4 + 4 + 4 – 1 комбинация, всего 25 исходов,

$$p = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

2012 г. (июнь). Повторный ЕГЭ (вторая волна).

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 50 качественных сумок приходится 5 сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение. Всего сумок 55, $p = \frac{50}{55} = \frac{10}{11} \approx 0,909 \approx 0,91$.

Примечания:

1. Всегда надо очень внимательно читать условие: не «из 50 сумок 5 с дефектами», а «на 50 хороших сумок 5 с дефектами».
2. Чтобы округлить до сотых, надо сначала получить результат с точностью до тысячных.

2012 г. (июль) ЕГЭ (третья волна).

В классе 21 учащийся, среди них две подруги – Аня и Нина. Класс случайным образом делят на 7 групп по 3 человека в каждой. Найдите вероятность того, что Аня и Нина окажутся в одной группе.

Решение. Допустим, что Аня попала в какую-то группу. Тогда для Нины есть два благоприятных места в этой же группе, а всего у нее 20 возможных мест (ведь одно место уже заняла Аня).

$$p = \frac{2}{20} = 0,1.$$

Задачи из некоторых вариантов 2013 г.

1. Найдите вероятность того, что при трех бросках монеты решка не выпадет ни разу.

   Решение. Из условия следует, что орел должен выпасть три раза. Вероятность орла при одном броске 0,5, выпадение орлов – события независимые, поэтому вероятность выпадения трех орлов равна $0{,}5^3 = 0{,}125$.

2. Найдите вероятность того, что при двух бросках игрального кубика произведение выпавших очков будет числом четным.

   Решение. Вариантов получения четного произведения много – ведь достаточно, чтобы хотя бы один множитель был четным числом. Гораздо проще найти вероятность противоположного события: произведение – нечетное число. Тогда оба множителя – нечетные числа 1, 3, 5, они образуют 9 пар (каждой цифре при первом броске соответствует одна из цифр при втором броске). Всего возможных пар чисел при двух бросках 36,

   $p = \frac{9}{36} = 0{,}25.$

   Теперь найдем вероятность появления четного произведения чисел: $1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Задачи контрольной работы для студентов
Санкт-Петербургского государственного
архитектурно-строительного университета

1. Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент ответит на три вопроса, предложенных ему экзаменатором.
   Решение. Можно перемножить вероятности первого «хорошего» вопроса, второго «хорошего» вопроса и третьего «хорошего» вопроса:

   $\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{28}{38}\approx 0{,}41$. Можно разделить C_{30}^{3} на C_{40}^{3}.

2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6 и не меняется от выстрела к выстрелу. Стрельба прекращается сразу же после первого попадания в цель. Какова вероятность того, что будет сделано не более двух выстрелов?
   Решение. По условию цель должна быть поражена или первым выстрелом (событие A), или вторым (событие B) в случае промаха при первом выстреле. Применим формулу полной вероятности:
   $$p = p(A) + p(\overline{A}) \cdot p(B) = 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}84.$$

3. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех независимых выстрелах равна 0,9984. Найдите вероятность попадания в цель при одном выстреле, если она одинакова для всех выстрелов.
   Решение. Пусть p – вероятность промаха при одном выстреле. Тогда вероятность промахов при четырех выстрелах p^4. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при

четырех выстрелах – это $1 - p^4$. По условию $1 - p^4 = 0{,}9984$, отсюда $p = 0{,}2$, следовательно, вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8.

4. Среди 25 лотерейных билетов 5 выигрышных. Двое игроков по очереди берут по одному билету. Найдите вероятности следующих событий: а) первый игрок взял выигрышный билет, б) второй игрок взял выигрышный билет, в) оба игрока взяли выигрышные билеты.

Решение

а) $p = \frac{5}{25} = 0{,}2.$

б) Для второго игрока возможны две ситуации: первый игрок взял выигрышный билет и первый игрок не взял выигрышный билет. Поэтому $p = 0{,}2 \cdot \frac{4}{24} + 0{,}8 \cdot \frac{5}{24} = 0{,}2.$

в) $p = 0{,}2 \cdot \frac{4}{24} = \frac{1}{30}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 21.

Есть пять карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 (по одной цифре на карточке). Из них случайным образом составили двузначное число. Какова вероятность, что это число

а) состоит из нечетных цифр,

б) нечетное?

Задача 22.

Какова вероятность, что при броске двух кубиков на них выпадут одинаковые цифры?

Задача 23.

Какова вероятность, что при броске двух кубиков на них выпадут цифры, отличающиеся на 3?

Задача 24.

Монету подбросили 4 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 3 раза.

Задача 25.

В соревнованиях по бегу на коньках участвуют 30 спортсменов, из них двое российских. Спортсменов случайным образом разделили на три группы по 10 участников. Найдите вероятность того, что оба российских спортсмена окажутся в одной группе.

Задача 26.

Два стрелка поочередно стреляют по стеклянной мишени до первого попадания. Вероятность попадания для стрелка A равна 0,2, для стрелка B – 0,3. Первым стреляет A. Найдите вероятность того, что всего будет сделано 3 выстрела.

Задача 27.

В коробке 6 белых и 4 красных шара. Из коробки наугад достают шары до появления первого красного шара. Какова вероятность, что всего будет сделано 4 извлечения?

Задача 28.

Мастер спорта по биатлону при стрельбе стоя попадает в мишень с вероятностью 80%. Он делает 5 выстрелов по 5 мишеням. Какова вероятность, что он не сделает ни одного промаха? Найдите ответ с точностью до десятых.

Задача 29.

Мастер спорта по биатлону при стрельбе лежа попадает в мишень с вероятностью 80%. Он делает 5 выстрелов по 5 мишеням. Какова вероятность, что он сделает только один промах? Найдите ответ с точностью до десятых.

Задача 30.

Из 40 билетов лотереи 10 выигрышных. Распространитель билетов старается привлечь покупателей, сообщая, что каждый четвертый билет выигрышный. Виктор наугад вытянул 4 билета. Какова вероятность, что среди них будет хотя бы один выигрышный?

Задача 31.

Стрелок при одном выстреле попадает в цель с вероятностью 0,8. Найдите вероятность того, что при трех выстрелах он попадет в цель

а) ровно 1 раз,

б) ровно 2 раза,

в) хотя бы один раз.

Задача 32.

В первом ящике 14 красных яблок и 6 зеленых, во втором – 25 красных и 5 зеленых. Из каждого ящика взяли наугад по одному яблоку. Какова вероятность того, что

а) оба яблока зеленые,

б) оба яблока красные,

в) хотя бы одно яблоко красное?

Задача 33.

Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,8. Первый стрелок сделал 1 выстрел, второй – два выстрела. Какова вероятность, что

а) ровно две пули попали в мишень,

б) хотя бы две пули попали в мишень?

Задача 34.

В группе из пяти стрелков 2 отличных и 3 хороших. Вероятность попадания в цель при одном выстреле у отличного стрелка 0,9, у хорошего – 0,7. Найдите вероятность того, что случайно выбранный стрелок при одном выстреле попадет в цель.

Задача 35.

В колоде 36 карт, наугад вытащили 4 карты. Найдите вероятность того, что все эти карты разных мастей.

Задача 36.

В торговом центре на первом и третьем этажах два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в каком-либо автомате закончится кофе, равна 0,1 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Задача 37.

В бизнес-центре на первом этаже установлены два одинаковых автомата по продаже кофе. Вероятность того, что к концу рабочего дня в автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,09. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Задача 38.

В светильнике три лампы. Для любой из ламп вероятность того, что она в течение года не перегорит, равна p. Какова вероятность того, что в течение года

а) хотя бы одна лампа перегорит,

б) ровно одна лампа перегорит,

в) две лампы перегорят.

Задача 39. (Из варианта экзамена по математике в Англии)

В пакетике n конфет, 6 из них красные, остальные – желтые. Элис вынимает из пакетика одну конфету и съедает. Затем она наугад вынимает вторую конфету и тоже съедает. Вероятность того, что Элис съела две красные конфеты, равна $\frac{1}{3}$. Сколько конфет было в пакетике?

Задача 40.

Есть три коробки. В первой лежат 5 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных шара, в третьей – 8 белых шаров. Наугад выбирают коробку и из нее наугад вынимают один шар. Найдите вероятность того, что это будет черный шар.

Задача 41.

Студент к экзамену успел подготовить 15 вопросов из 25. Он первым подошел к столу с вопросами и наугад выбрал три. Вероятность того, что из этих вопросов он знает ровно два вопроса – больше или меньше 50%?