# 17 февраля. Занятие 17

## Метод индикаторов.

**1.** Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет число очков, кратное трём. Найдите математическое ожидание числа бросков.

Ответ: 3.

Решение: Вероятность успеха при каждом последующем испытании равна . Как мы помним, для случайной величины "число испытаний до первого успеха" при вероятности успеха  в каждом испытании математическое ожидание равно . Подставляя , получаем ответ.

**2.** В коробке 24 карандаша и 18 фломастеров. Маша берёт наугад 7 предметов. Найдите математическое ожидание числа вынутых карандашей.

Ответ: 4.

Решение: Для каждого предмета введём индикатор того, что он окажется карандашом. Они все распределены одинаково и равны 1 с вероятностью . Общее количество карандашей равно сумме индикаторов, которых 7 штук, и математическое ожидание каждого из них равно . Значит, математическое ожидание числа карандашей равно .

**3.** Биатлонист стреляет по пяти целям. На каждую даётся не более трёх выстрелов. Вероятность поражения каждой цели при каждом выстреле равна . Найдите математическое ожидание числа поражённых целей.

Ответ: 4,865.

Решение: Как и ранее, обозначим . Вероятность поражения одной цели за не более, чем три выстрела равна  (так как  – это вероятность того, что за три выстрела цель не поражена). Для каждой цели введём индикатор того, что она поражена, он будет равен 1 с вероятностью . Число поражённых целей – это сумма этих индикаторов, а математическое ожидание числа поражённых целей – это сумма математических ожиданий этих индикаторов. Математическое ожидание каждого равно , и их 5 штук. Получаем . Подставляем сюда известное значение  и получаем ответ.

**4**. В 11"Д" классе учится 24 человека. Перед выпускным вечером каждый из школьников приготовил памятный подарок (и они все оказались различными). После этого все подарки сложили в пакет, и каждый школьник вытащил один из них случайным образом. Чему равно математическое ожидание числа школьников, получивших свой же подарок?

Ответ: 1.

Решение: Расположим всех учеников в алфавитном (или любом другом, это неважно) порядке и присвоим каждому порядковый номер от 1 до 24. Также присвоим номер от 1 до 24 каждому подарку, соответственно человеку, который этот подарок приготовил. Введём индикаторы : , если -ый школьник получил свой же подарок (т.е. с номером ), и 0 в обратном случае. Тогда , поскольку каждый отдельно взятый школьник может получить каждый из подарков с вероятностью , и только один из подарков – его же. Число школьников, получивших свои же подарки, равно сумме таких индикаторов, а математическое ожидание числа таких школьников – сумме математических ожиданий индикаторов. Математическое ожидание каждого из них равно , их всего 24, значит, математическое ожидание числа школьников, получивших свой же подарок, равно .

**5**. Родители учащихся 11"Д" класса, пока их дети разучивали вальс для выпускного вечера, тоже отправились на танцклассы. Всего получилось 24 семейных пары, причём в каждой паре муж и жена одинакового роста, а двух пар одного роста не было. Когда заиграла музыка, кавалеры пригласили дам на танец случайным образом.

а) Найдите математическое ожидание числа танцующих пар, где кавалер выше дамы.

б) Тот же вопрос, если известно, что ни один кавалер не танцует со своей женой.

Ответ: а) ; б) 12.

Решение: Пронумеруем все семейные пары (можно в алфавитном порядке, или любым другим способом) от 1 до 24, то есть каждый муж и каждая жена получают номер от 1 до 24, и муж и жена имеют одинаковый номер. Введём три случайные величины:  – это число танцующих пар, где кавалер выше дамы,  – это число танцующих пар, где дама выше кавалера, и  – это число танцующих пар, где кавалер и дама одного роста (т.е. имеют одинаковый номер). Нас интересует .

, поскольку все пары относятся ровно к одной из этих трёх категорий, а значит, все они посчитаны в этой сумме.

Рассмотрим какую-то расстановку кавалеров и дам на пары. Поменяем все пары местами: если, например, 5 кавалер танцевал с 11 дамой, то теперь 11 кавалер будет танцевать с 5 дамой, и так далее. Тогда все пары, где кавалер был выше дамы, станут такими, где дама выше кавалера, и наоборот. Пары, где кавалер и дама одного роста, не изменятся. Значит, величины  и  распределены одинаково, а значит, .

а) Величина  – это такая же случайная величина, как и в предыдущей задаче: это число дам, которым достались в партнёры их же кавалеры. Значит, . Отсюда  и .

б) Если ни один кавалер не танцует со своей женой, то . Значит,  и .

**6.** В кинотеатре в ряду 24 места. На определённый сеанс все 24 билета на пятый ряд были куплены. Из-за ремонта проход в пятый ряд есть только с одной стороны. Зрители проходят на свои места в случайном порядке. Если кто-то уже занял своё место, то чтобы пропустить другого, ему необходимо встать. Найдите математическое ожидание числа вставаний.

Ответ: 138.

Решение: Пусть  – индикатор события "Один из пары зрителей с билетами на места  и  должен встать, чтобы пропустить другого" для . , только если эти двое идут "в неправильном порядке", то есть первым зритель , у которого кресло ближе к проходу. Вероятность этого равна 0,5. Значит,  для всех пар  и . Рассмотрим случайную величину  – число вставаний. Тогда  ( – число зрителей) и . Подставляя , получаем ответ.

**7.** Строительная компания "Высота" строит дома на одной улице. Всего по плану она должна построить 20 домов от одноэтажного до двадцатиэтажного. Высота одного этажа для всех домов одинакова. Количество этажей в каждом доме распределяется случайным образом. После окончания строительства каждый более высокий дом загораживает более низкие, и их не видно. Найдите математическое ожидание числа домов, которые видно.

Ответ: .

Решение: Пронумеруем дома в том порядке, в котором они стоят вдоль улицы (а не по высоте = количеству этажей). Введём  – индикатор события "-ый дом видно" (). Количество домов, которые видно, – это величина . Значит, . При этом . Найдём эти вероятности.

, ведь первый дом видно всегда (некому его загораживать). , поскольку из пары домов с номерами 1 и 2 с вероятностью  второй дом выше. , поскольку из тройки домов 1, 2 и 3 с вероятностью  3 дом – самый высокий. Действительно, из всех комбинаций 123, 132, 213, 231, 312 и 321 в двух (123 и 213) 3-ий дом самый высокий. И так далее. Для всех  , поскольку из домов  -ый дом самый высокий с вероятностью . Действительно, из всех  комбинаций из номеров   комбинаций, где  на последнем месте.

Отсюда .

Сумма чисел, обратных натуральным, называется -ым гармоническим числом: . С помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена можно найти приближённое значение: . Здесь  - натуральный логарифм , а  – постоянная Эйлера ().

Надежда Сошитова