# 10 февраля. Занятие 16

## Дисперсия.

**1.** Даны две случайные величины и их распределения: , . (см. задачу 1 с прошлого занятия). Найдите дисперсии следующих величин: а) ; б) ; в) ; г) ; д) . При каких условиях это можно сделать?

Ответ: а) 1,29; б) 0,6; в) 5,76; г) 0,81; д) 2,73. Условие – независимость  и .

Решение: Построим распределение величин , ,  и : , ,  и .

Для пунктов в) и д) требуется независимость величин (для того, чтобы воспользоваться свойством: дисперсия суммы величин равна сумме их дисперсий, верным для независимых случайных величин).

а) .

б) .

в) .

г) .

д) .

**2.** Монету бросают 10 раз. Найдите дисперсию числа выпавших орлов (см. задачу 2 с прошлого занятия).

Ответ: 2,5.

Решение: Так же, как и в прошлый раз, обозначим за  число выпавших орлов.

Введём 10 случайных величин  – индикаторы того, что при -ом броске выпал орёл (т.е. , если при -ом броске выпал орёл, и , если выпала решка). Тогда  для всех . Все эти величины имеют одинаковое математическое ожидание  и дисперсию . Кроме того, все эти величины независимы, так как результат каждого броска не зависит от предыдущих. Напомним, что . В этом равенстве перейдём к дисперсиям: .

**3.** Дано распределение двух случайных величин. Найдите их математическое ожидание и дисперсию. Сравните полученные значения. Что вы замечаете?

; .

Ответ: , ; , .

Решение: По определению находим математическое ожидание и дисперсию.

Обратите внимание: у двух случайных величин ( и ) одинаковый набор значений, но разные вероятности. Математические ожидания получились одинаковыми, а дисперсия отличается: . Это означает, что значения величины  больше отклоняются от среднего значения (т.е. математического ожидания), чем значения величины .

**4**. Ася и Вася вырезают прямоугольники из клетчатой бумаги (см. задачу 4 с прошлого занятия). Вася ленивый; он кидает игральную кость один раз и вырезает квадрат, сторона которого равна выпавшему числу очков, увеличенному на 1. Ася кидает кость дважды и вырезает прямоугольник с длиной и шириной, равными выпавшим числам, увеличенным на 1. У кого дисперсия площади прямоугольника больше?

Ответ: У Аси математическое ожидание площади равно , а у Васи – . У Аси дисперсия площади равна , а у Васи – . У Васи снова получается больше.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 16 | 36 | 64 | 100 | 144 | 196 |
| 2 | 36 | 81 | 144 | 225 | 324 | 441 |
| 3 | 64 | 144 | 256 | 400 | 576 | 784 |
| 4 | 100 | 225 | 400 | 625 | 900 | 1225 |
| 5 | 144 | 324 | 576 | 900 | 1296 | 1764 |
| 6 | 196 | 441 | 784 | 1225 | 1764 | 2401 |

Решение: Так же, как и в прошлый раз, обозначим за  и  случайные величины, обозначающие площади вырезанных фигур у Аси и Васи соответственно. Воспользуемся ранее полученными результатами (см. задачу 4 с прошлого занятия). Как мы помним,  и . Отсюда получается, что  и .

Теперь вспомним, как выглядела таблица распределения , и по ней построим аналогичную таблицу для распределения . Аналогично прежним рассуждениям подсчитаем сумму в первой строке, вынося множитель 4: . Точно так же сумма очков во второй строчке равна , и так далее. Сумма очков в последней строке равна . Теперь сложим эти суммы по строкам, заметив, что выражение в скобках у них у всех одинаковое. Получится . Отсюда по формуле для дисперсии . Получается, что ; это означает, что величина  сильнее отклоняется от своего математического ожидания, чем величина .

**5**. За контрольную работу Артём может получить оценку от 2 до 5 (см. задачу 5 с прошлого занятия). Вероятность того, что оценка будет 2, равна 0,15. Вероятность того, что оценка будет не больше 3 – 0,45, не больше 4 – 0,75. Найдите дисперсию оценки Артёма за контрольную работу.

Ответ: Обозначим случайную величину "оценка Артёма за контрольную работу" за . Тогда ,  и .

Решение: Распределение величины  мы уже построили на прошлом занятии, теперь осталось вычислить дисперсию. Заметим, что дисперсия маленькая (значительно меньше математического ожидания). Это говорит о том, что величина  слабо отклоняется от своего математического ожидания, т.е. с большой вероятностью принимает близкие к нему значения (3 и 4).

**6.** Игральную кость бросают 2 раза. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины "сумма выпавших очков".

Ответ: Математическое ожидание равно 7, а дисперсия равна .

Решение: Эту задачу можно решать "в лоб", подсчитав распределение величины "сумма выпавших очков" (это мы уже делали ранее), а затем по определению подсчитав дисперсию. Этот путь будет правильным, но достаточно долгим и трудоёмким, и на нём легко допустить ошибку в расчётах. Предлагаю использовать другой способ.

Обозначим за  и  случайные величины, соответствующие числу очков, выпавших при первом и втором броске соответственно. Заметим, что величины  и  независимы. Тогда  – это сумма выпавших очков.

Мы знаем, как распределены величины  и : . Отсюда вычисляем:  и . Значит,  и .

**7\*.** Стрелок стреляет в мишень до тех пор, пока не поразит её (см. задачу 8 с прошлого занятия). Вероятность попадания при каждом выстреле равна  и не зависит от результатов предыдущих выстрелов. Рассмотрим случайную величину  "число сделанных выстрелов". Найдите .

Ответ:  и .

Решение: Так же, как и ранее, обозначим события "первые  выстрелов неудачные" и индикаторы . Событие  означает, что произошло событие  и при этом не произошло событие . Нас интересует вероятность .

Стрелок делает -ый выстрел только в том случае, если при предыдущих  выстрелах он ни разу не попал в мишень, т.е. произошло событие . Строго говоря, это означает, что . При этом . Отсюда по формуле полной вероятности

.

Из мы видим, что каждая следующая вероятность получается из предыдущей умножением на , и при этом . Тогда .

Значит, можно построить распределение индикаторов: . Отсюда .

Как мы помним, . Напомним, что (см. задачу 8 с прошлого занятия) . Теперь выразим :



Это бесконечная сумма всех квадратов индикаторов, потом всех удвоенных индикаторов, и, наконец, удвоенная сумма всех попарных произведений вида , где . Заметим, что  для всех  и  при  (поскольку если в -ом испытании неудача, то и во всех предыдущих тоже). Значит,



Перейдём к математическим ожиданиям: . Выражение в последней скобке – это , а как мы помним, . Значит,  Отсюда .

Надежда Сошитова