# 13 января. Занятие 12

## Повторение. Комбинаторика в вероятностных задачах.

**1.** В группе детского сада "Ромашка" 12 девочек и 15 мальчиков. Художественный руководитель выбирает случайным образом 6 человек для участия в конкурсе "Рождественский рисунок". Какова вероятность того, что среди выбранных детей мальчиков будет больше, чем девочек?

Ответ: .

Решение: Мальчиков будет больше, чем девочек, если их будет 4, 5 или 6. Найдём вероятности каждого из этих трёх событий, а затем сложим их.

Всего у руководителя есть  возможностей выбрать 6 человек из группы в 27 человек. Подсчитаем, сколько из них соответствуют случаю, когда четыре из шести выбранных – мальчики. Их будет , потому что нам необходимо выбрать четырёх человек из 15 (мальчиков) и ещё двух из 12 (девочек). Значит, вероятность того, что среди 6 выбранных детей будет 4 мальчика, равна . Таким же образом вероятность того, что среди выбранных детей ровно 5 мальчиков, равна , а вероятность того, что среди выбранных детей все 6 – мальчики, равна . Тогда вероятность того, что среди выбранных детей мальчиков будет 4 или более, равна .

**2.** У Наташи в коробке лежат новогодние шары трёх цветов: белые, золотые и красные, по 10 штук каждого цвета. Наташа достаёт из коробки 4 случайных шара. Какова вероятность того, что белых шаров будет больше всего?

Ответ: .

Решение: Запишем комбинации шаров в виде 202, где цифры означают количество белых, золотых и красных шаров соответственно. Тогда белых шаров больше всего в комбинациях 400, 310, 301 и 211. Вычислим вероятность каждой из них.

. . . Отсюда искомая вероятность равна .

## Бинарная случайная величина (индикатор).

**1.** Пусть в случайном опыте из двух бросков монеты событие  состоит в том, что результаты бросков различны. Составьте распределение индикатора .

Ответ: .

Решение: Всего в данном опыте четыре элементарных исхода, из них в двух результаты бросков совпадают (ОО и РР), а в двух других – различны (ОР и РО). Отсюда вероятность того, что результаты бросков различны, равна 2/4=1/2. Отсюда получается распределение индикатора: он принимает значение 1 с вероятностью  и 0 с вероятностью .

**2.** Игральную кость бросают два раза. Событие  состоит в том, что сумма выпавших очков равна 8, а событие  – в том, что хотя бы одно из выпавших чисел кратно трём. Составьте распределения индикаторов , ,  и .

Ответ: ; ; ; .

Решение: Индикатор события  принимает значение 1 с вероятностью  для любого события . Подставляя в качестве  поочерёдно события , ,  и , строим распределение индикаторов каждого из этих событий. Фактически нам необходимо найти вероятности каждого из них. Построим таблицу с элементарными исходами, обозначим в ней событие  малиновым, а событие  – голубым (их пересечение отметим фиолетовым, а объединение – это просто все закрашенные хоть как-то клетки). Смотря на эту картинку, несложно подсчитать требуемые вероятности.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 |   |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |

**3.** Телефон в условиях неустойчивого сигнала сети пытается отправить СМС-сообщение до тех пор, пока это не удастся сделать, либо пока не закончатся попытки (обычно их даётся 20 или 30). Вероятность успешного отправления сообщения при каждой отдельной попытке равна . Составьте распределение индикаторов следующих событий:

а) 1-я попытка оказалась успешной;

б) 2-я попытка оказалась неудачной;

в) 6-я попытка успешная;

г) -я попытка успешная;

д) -я попытка неудачная.

Ответ: Обозначим .

а) ; б) ; в) ; г) ; д) .

Решение: Обозначим события "-я попытка неудачная". Соответственно, "-я попытка успешная".

а) Первая попытка оказывается успешной с вероятностью  и неудачной с вероятностью .

б) Вторая попытка может состояться только в том случае, если первая попытка была неудачной, то есть произошло событие  (с вероятностью ). Строго говоря, это формулируется так: вероятность неудачи при второй попытке () при условии успеха при первой попытке () равна 0. При этом вероятность неудачи при второй попытке () при условии неудачи при первой попытке () равна  (по условию). Тогда по формуле полной вероятности получаем, что.

д) . Каждая следующая вероятность получается из предыдущей умножением на , и мы знаем, что . Отсюда получаем, что .

в), г) . Отсюда получаем, что .

Сумма вероятностей в нижней строке для случайной величины (в том числе и для индикатора) должна равняться 1. Отсюда находится недостающая вероятность.

**4**. Найдите математическое ожидание бинарной случайной величины:

а) ; б) ; в) .

Ответ: а) 3/4; б) 0,3; в) .

Решение: в) По формуле для математического ожидания .

**5**. Монету бросают 6 раз.

а) Для каждого броска с номером  составьте распределение индикатора  события "при -ом броске выпала решка".

б) Рассмотрим случайную величину  "число выпавших решек". Как случайная величина  выражается через эти индикаторы?

в) Можно ли на основании этого составить распределение ?

Ответ: а) ; б) ; в) .

Решение: а) Поскольку результат каждого броска не зависит от остальных, то все индикаторы  распределены одинаково – они принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями (орёл и решка выпадают каждый раз равновероятно).

б) Каждый из индикаторов  равен 1 в том и только в том случае, когда в результате броска с номером  выпала решка. Рассмотрим сумму индикаторов . Каждое слагаемое равно либо 0, либо 1, и число 1 – это и есть число выпавших решек. С другой стороны, число 1 – это и есть само число .

в) Зная, что все индикаторы  не зависят друг от друга, мы можем построить распределение их суммы. ,  и , поскольку вероятность того, что выпадет 2 решки, равна вероятности того, что выпадут два орла (и 4 решки), и так далее, благодаря равновероятности выпадения орла и решки при каждом броске. Вычислим вероятности: , , , . Отсюда получается распределение.

**6**. В 8"В" классе учится 25 человек. Перед Новым Годом каждый из школьников принёс в подарок открытку с новогодними пожеланиями (и они все оказались различными). После этого все открытки сложили в пакет, и каждый школьник вытащил одну из них случайным образом.

а) Составьте индикатор события "-ому школьнику досталась его же открытка".

б) Выразите через эти индикаторы величину  "число школьников, получивших свои же открытки".

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) Каждому школьнику может достаться любая из 25 открыток с равными вероятностями (по 1/25), и только одна из них – его.

б) Аналогично пункту б) задачи 5, число школьников, получивших свои же открытки – это число единиц в сумме индикаторов.

**7.** В семье два ребёнка: Аня и Ваня. Они оба очень не любят мыть посуду, поэтому, чтобы никому не было обидно, определяют очерёдность при помощи броска монеты: если выпадает орёл, то в этот день очередь Ани мыть посуду, а если решка – то очередь Вани. Правда, Аня схитрила и нашла монетку, которая выпадает решкой с вероятностью .

а) Составьте распределение индикатора события  "в этот день очередь Вани мыть посуду".

б) В феврале 2020 года 29 дней. Аня подсчитала, что она может ожидать около 17 дней, когда ей не придётся мыть посуду. Чему равно  (ответ округлите до сотых)?

Ответ: а) ; б) .

Решение: а) По определению индикатора он равен 1 с вероятностью .

б) Рассмотрим 29 индикаторов , . Для каждого дня месяца это будет индикатор того, что в этот день очередь Вани мыть посуду. Они будут независимы друг от друга.  для всех . Обозначим . Тогда ожидаемое число дней, когда очередь Вани мыть посуду, – это . Поскольку известно, что ожидаемое число таких дней равно 17, делаем вывод, что .

Надежда Сошитова