# 7 октября. Занятие 1, вводное

## Правдоподобие. Зачем нужна теория вероятностей. Закон больших чисел

### Перчатки в ящике

Начнём с простой задачи. В ящике лежит 100 чёрных и 100 синих носков. Будем доставать носки по одному наугад (на ощупь в темноте). Сколько нужно вынуть носков, чтобы составить из них пару одного цвета? Ясно, что достаточно трёх: если мы вытащим два носка, они могут быть разного цвета, но три носка не могут быть все разного цвета.

Теперь задача чуть посложнее: в ящике лежит 100 левых и 100 правых перчаток. Сколько нужно вытащить перчаток наугад, чтобы среди них точно нашлась пара (одна левая и одна правая перчатка)? Ответ получается из принципа Дирихле: нужно достать 101 перчатку.

Если заменить требование «наверняка» требованием «почти наверняка», то оказывается, что достаточно взять всего 6 перчаток, и тогда с очень высокой вероятностью среди них будет пара. *Доказательство*. Предположим, что первая вынутая перчатка – левая. Какова теперь вероятность того, что оставшиеся пять тоже будут левыми?

.

Это значит, что с вероятностью больше, чем , не все перчатки будут левыми, то есть среди них найдется пара. Это нас устроит, *если мы верим в событие*, имеющее вероятность  или больше. Считаем его очень *правдоподобным*. А событие с вероятностью около 0,03 считаем *неправдоподобным* и не принимаем его в расчет.

Если кто-то так не считает, пусть возьмёт не 6 перчаток, а 7.

### В чём разница между «наверняка» и «практически наверняка»

В задаче про перчатки мы получили пару, взяв 6 перчаток. Но не наверняка, а практически наверняка. *В жизни между «наверняка» и «практически наверняка» разницы нет*. В однократном опыте мы верим в очень вероятные события и не верим в практически невероятные.[[1]](#footnote-1)

Важно уметь выбрать эту «решающую» вероятность. В примере с перчатками, например, можно было выбрать 0,95 или даже 0,96. Самая большая неприятность, что может случиться – не будет пары перчаток.

Но если (в медицине или в авиации) цена ошибки очень велика, то лучше принимать на веру только те события, вероятности которых намного выше, скажем, не менее 0,999. Выбор только за нами.

Вот примеры задач, которые нельзя решить наверняка, но можно решить практически наверняка:

1. Сколько нужно запасти саженцев, чтобы не менее 100 из них прижилось, если известна вероятность гибели одного саженца: 0,05?
2. Сколько нужно иметь в запасе одеял в городском убежище на случай землетрясения или наводнения?
3. Сколько нужно иметь в запасе бумаги, чтобы хватило всем участникам ЕГЭ по математике?

Ни одна из этих задач не может быть решена точно, поскольку число погибших саженцев может быть любым, школьники могут исписать немыслимую гору бумаги и т.п. Но все эти задачи разумно решаются с помощью теории вероятностей. Теория вероятностей важна, поскольку она может *предложить полезные решения задач* «почти наверняка» там, где «точная математика» решений не даёт или даёт бессмысленные (например, 101 перчатку).

### Рыба или курица

Пример вероятностной задачи. В самолёте 200 пассажиров, и авиакомпания загрузила на борт 100 порций обедов с курицей и 100 порций – с рыбой. Не все любят курицу, не все любят рыбу. Может случиться (и иногда бывает), что некоторые пассажиры недовольны. Авиакомпания провела исследование и выяснила, что на 100 последних одинаковых рейсах всего оказалось 738 недовольных пассажиров. Значит, среднее число недовольных в расчёте на один рейс равно 7,38.

Можно ли опираться на это среднее значение при дальнейших прогнозах? Мнения участников кружка разделились. После обсуждения мы пришли к следующим утверждениям:

1. Среднее число недовольных пассажиров 7,38 – это *статистика*, которая в дальнейшем может изменяться (на других 100 таких же рейсах среднее число недовольных может быть другим). То есть, среднее число – величина случайная и изменчивая.
2. Мы не верим в то, что изменения будут значительны. Мы готовы поверить в 5, 6 или 10 недовольных в среднем пассажиров, но не готовы поверить в 20 или 50. Нам представляется *неправдоподобным* такое резкое изменение среднего значения. Почему? Мы это чувствуем.
3. Если среднее все же сильно меняется, это значит, что изменились условия эксперимента (например, изменилось число пассажиров на рейсе или вдруг среди них стало много вегетарианцев).

Иными словами, если условия эксперимента (полёта) остаются неизменными, то при накоплении большого числа наблюдений над величиной можно рассчитывать на то, что среднее значение этой величины в дальнейшем значительно меняться не будет – наблюдается статистическая устойчивость. Почему? Только наш опыт и интуиция утверждают, что это так.

Иван Высоцкий

1. Обратите внимание: речь идет об однократном опыте. Если такой опыт проводить множество раз, то рано или поздно случится и самое невероятное. Пословица гласит: «Раз в жизни стреляет незаряженное ружьё». [↑](#footnote-ref-1)