

Глава VII

Геометрическое распределение

§ 13. Число испытаний до первого успеха

К геометрическому распределению приводит задача, связанная с испытаниями Бернулли. Рассмотрим испытания Бернулли с вероятностью успеха p и с вероятностью неудачи $q = 1 - p$.

Предположим, что мы проводим испытания до появления первого успеха. После появления успеха испытания не продолжаем. Пусть случайная величина X — число проведённых испытаний. Надо найти распределение случайной величины X .

Очевидно, что возможные значения X — натуральные числа. Событие $X = k$ означает, что сначала оказалось $k - 1$ неудач, а в испытании с номером k наступил успех:

$$\{X = k\} = \underbrace{\text{ННН...ННУ}}_{k-1 \text{ раз}}.$$

Испытания Бернулли независимы, поэтому

$$P(X = k) = q^{k-1}p \quad \text{для } k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, получается геометрическое распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \\ p & qp & q^2p & q^3p & \dots & q^{k-1}p & \dots \end{pmatrix}.$$

Проверим, что сумма всех вероятностей в распределении равна единице. Для этого нам потребуется формула суммы бесконечной геометрической прогрессии. Первый член прогрессии равен p , а знаменатель равен q . Получаем

$$p + qp + q^2p + q^3p + \dots = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$



Пример 1. Мы хотим отправить СМС — короткое сообщение с помощью мобильного телефона. Наш телефон отправляет СМС ближайшей станции сотовой связи. Станция подтверждает, что сообщение

Название происходит от связи этого распределения с геометрической прогрессией.

пришло без искажений (успех). Если искажения есть (неудача), телефон делает следующую попытку и т. д.

Предположим, что мы находимся далеко от станции в зоне неуверенного приёма. Тогда вероятность передачи без искажений мала. Поэтому телефон может сделать много попыток, прежде чем удастся отправить СМС. Предположим для определённости, что вероятность отправить СМС без искажений равна $p = 0,05$.

Найдём вероятность того, что СМС будет отправлена менее чем за 100 попыток. Снова на помощь приходит суммирование геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} P(X \leq 100) &= p + qp + q^2p + \dots + q^{99}p = \\ &= p \cdot \frac{1 - q^{100}}{1 - q} = 1 - q^{100} = 1 - 0,95^{100} \approx 0,994. \end{aligned}$$

Как видим, сообщение, скорее всего, будет передано, даже несмотря на плохую связь.

Попытки следуют быстро одна за другой, мы даже не знаем, сколько попыток сделал наш телефон. Иногда, отправляя СМС из леса, можно заметить, что отправка происходит намного дольше, чем обычно, — телефон несколько секунд показывает, что сообщение всё ещё не ушло¹.



¹ На самом деле в телефонах предусмотрена защита от «зависания». Если какое-то определённое число попыток безуспешно, телефон прекращает передачу и сообщает о том, что сообщение не отправлено.