

И. ВЫСОЦКИЙ,  
Ю. ТЮРИНА,  
Москва,  
Ким Хонг ТЕХ,  
SEAMEORECSAM, Малайзия

Материалы предоставлены Ким Хонг Тех и  
Уи Хок Чи, SEAMEORECSAM, Малайзия.

Перевод с малайского на английский  
Уи Хок Чи,  
на русский  
Ю.А. Тюриной.

1–11 классы

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА В МАЛАЙЗИИ

В статье описана школьная программа по статистике и теории вероятностей начальной (1–6-й класс) и средней (7–11-й класс) школы, принятая в Малайзии после реформы образования. В качестве иллюстраций к программе приводятся задания выпускных экзаменов для начальной и средней школы.

Возможность нации стать индустриальным обществом зависит от развития науки и технологии. В документах Министерства образования Малайзии утверждается: «...Успех в предоставлении качественного образования гражданам Малайзии с раннего возраста поможет преобразовать нацию в общество знаний и сделать ее уверенным игроком на мировой арене. Чтобы достичь этой цели, в образовательной системе Малайзии научному и математическому образованию придается огромное значение». [1]

Цель данной статьи — познакомить учителей с практикой преподавания статистики и теории вероятностей в странах Юго-Восточной Азии, сравнить их подходы, задачи и понимание предмета с тем, как это развивается в России.

## Программа по вероятности и статистике и задачи школьных выпускных экзаменов

Школьные программы в странах SEAMEO<sup>1</sup> разрабатываются на основе национальных нужд и планов. При разработке используются рекомендации специалистов по образованию из более продвинутых стран; также важную роль играет деятельность организации RECSAM (Региональный центр по вопросам естественно-научного и математического образования), обеспечивающей оценку качества образования. Деятельность RECSAM направлена на повышение качества естественно-научного, математического и технического образования в странах SEAMEO. Организация выступает как платформа для взаимодействия экспертов по математическому образованию и обмена идеями при создании новых школьных программ. В результате программы по математике стран SEAMEO имеют много общего. Поэтому программу по статистике и теории вероятностей Малайзии можно рассматривать как пример школьных программ большинства стран Юго-Восточной Азии.

<sup>1</sup> SEAMEO – South East Asia Ministers of Education Organization – межправительственная организация Совет министров образования Юго-Восточной Азии. В настоящее время объединяет представителей стран Бруней-Даруссалам, Камбоджа, Индонезия, Лаос, Малайзия, Мьянма, Филиппины, Сингапур, Таиланд, Восточный Тимор и Вьетнам.

4

В настоящее время Малайзия придерживается образовательной политики, направленной на то, чтобы 60% учащихся 10–11-х классов специализировались в технических специальностях, а 40% — в гуманитарных. Эта цель до сих пор не достигнута, но правительство и Министерство образования Малайзии продолжают движение в выбранном направлении. Предполагается, что требуемое соотношение будет достигнуто к 2020 году [3]. Однако официальные данные Министерства образования за 2014 г. говорят о том, что в 10-х и 11-х классах на естественно-научных специальностях обучались лишь 29% учащихся. Остальные в большинстве своем обучались на гуманитарных и религиозных специальностях. Данные о поступивших в университеты в 2015 г. показывают похожую картину: на специальности «Естественные науки», «Математика» и «Компьютерные технологии» поступило 16,5% абитуриентов, а выпустилось в этом же году чуть меньше — 15% [2].

Поставленная цель, а также необходимость действовать быстро в связи со стремительно наступающей глобализацией и поставленной в рамках АТЭС задачей перехода к cross-border-образованию<sup>2</sup> — основные причины реформы школьной программы по математике, которая идет с начала 2010-х годов.

В 2011 году была введена в действие пересмотренная программа для начальной школы. В настоящее время действует пересмотренный вариант. Для средней школы, кроме 10–11-х классов, новая программа была введена только в 2017 году. Новая программа по математике для двух последних классов разрабатывается в настоящее время.

Одной из целей разработчиков новой программы было включение в программу принципов STEM<sup>3</sup>. Подход STEM направлен на то, чтобы соотносить знания, умения и навыки с общественной жизнью, ежедневной реальностью и окружающей средой<sup>4</sup>.

В новой программе по статистике важный элемент — развитие умения проводить статистические рассуждения для решения задач: формулировать вопросы, собирать и подбирать данные, анализировать их и интерпретировать полученные результаты.

Рассмотрим школьную программу Малайзии по годам обучения.

## Программа начальной школы

**1-й класс. Статистика.** За первый год школьник должен научиться собирать, классифицировать и представлять данные. Важно уметь собирать данные о реальной ситуации или о задаче, возникшей в реальной жизни. Для представления данных используются так называемые пиктограммы<sup>5</sup>, и школьник должен уметь читать их и получать из них нужную информацию. Также он должен научиться решать простейшие задачи, отражающие ситуации, возникающие ежедневно.

**2-й класс. Статистика.** Школьник учится собирать, классифицировать, организовывать и представлять данные, в том числе данные из повседневной жизни. Вводятся столбиковые диаграммы, и предполагается, что учащиеся умеют извлекать из них нужную информацию. Также учащиеся должны уметь решать задачи, возникающие в реальной жизни.

**3-й класс. Статистика.** Собирать, классифицировать, организовывать и представлять данные. В этом году вводятся круговые диаграммы, и учащиеся должны уметь извлекать информацию из столбиковых и круговых диаграмм, а также уметь показать соотношение между пиктограммами, столбиковыми и круговыми диаграммами, отображающими один и тот же набор данных.

**4-й класс. Статистика.** Собирать, классифицировать и обрабатывать данные, основанные на ежедневных ситуациях. Уметь читать круговые диаграммы и извлекать из них информацию. Знать соотношения между пиктограммами, столбиковыми и круговыми диаграммами. Уметь решать задачи, в том числе работать с данными в задачах о реальных ситуациях.

**5-й класс. Статистика.** Знать понятия *медиана, мода, среднее, диапазон значений*, уметь распознавать их в пиктограммах<sup>5</sup> и столбиковых диаграммах. Знать и уметь объяснять шаги, необходимые для построения пиктограмм и диаграмм. Уметь находить моду, медиану, среднее, максимум, минимум, диапазон значений для данного набора данных. Уметь оценить правильность ответов к задачам. Уметь строить пиктограммы и столби-

<sup>2</sup> Cross-border-образование — образование без границ — термин, означающий интернационализацию образования, что подразумевает не только единые учебные программы в ряде стран, но и высокую мобильность студентов и специалистов. Особенную популярность идея СВ-образования получила в странах Юго-Восточной Азии.

<sup>3</sup> STEM — Science, Technology, Engineering, Mathematics — естественные науки, технология, технические науки, математика.

<sup>4</sup> В какой-то мере соответствует крайне неудачному российскому термину «метапредметный подход».

<sup>5</sup> Под пиктограммами имеются в виду диаграммы, составленные из пиктограмм — символических изображений изучаемых величин (см. пример 3).

ковые диаграммы. Уметь решать реальные задачи, в которых возникает представление данных, и использовать при этом различные стратегии.

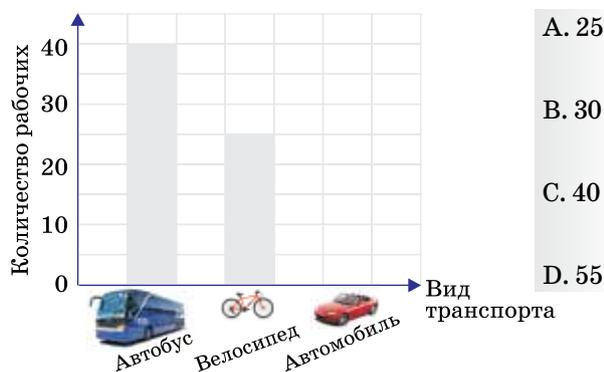
Уметь решать задачи, отличающиеся от рутинных, используя творческий и инновационный подход.

**6-й класс. Статистика.** Интерпретировать данные, представленные пиктограммами, столбиковыми или круговыми диаграммами. Решать задачи повседневной жизни, где требуется использование моды, медианы, среднего значения и диапазона значений, а также уметь решать такие задачи, для которых требуется читать или строить пиктограммы или диаграммы. **Теория вероятностей.** Уметь оценить шансы события в реальной жизни. Уметь характеризовать события как *невозможные, маловероятные, равновероятные, практически достоверные и достоверные* [9].

### Задачи по теме «Статистика и теория вероятностей» в национальной проверочной работе для начальной школы

Задачи взяты из национальной проверочной работы (UPSR), которую учащиеся Малайзии выполняют при окончании начальной школы, после шести лет обучения.

**Пример 1.** На столбиковой диаграмме показано, на каком транспорте рабочие добираются до фабрики. Количество рабочих, добирающихся на автомобилях, не показано. Всего на фабрике 120 рабочих. Найдите число рабочих, которые добираются до фабрики на автомобилях.



- A. 25
- B. 30
- C. 40
- D. 55

**Пример 2.** В таблице показаны оценки учеников за контрольную работу по математике. Вычислите среднюю оценку за контрольную работу.

Имя	Оценка
Эми	60
Ди-Лим	72
Чандрэн	48
Дани	84
Эвелин	86

- A. 66
- B. 70
- C. 72
- D. 86

**Пример 3.** На пиктограмме показано количество книг, прочитанных школьниками. Каждый символ обозначает три книги. Количество книг, которые прочитал Кенни, не показано. Среднее число прочитанных школьниками книг равно 9. Сколько символов нужно нарисовать, чтобы изобразить число книг, прочитанных Кенни?

Имя	Количество книг
Набли	
Кени	
Руби	
Шиван	

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

**Пример 4.** В таблице показана плата за потребление воды за три месяца. Найдите среднюю оплату за потребление воды за месяц.

Месяц	Оплата
Январь	72,55 ринггита*
Февраль	На 3 ринггита меньше, чем за январь
Март	78,25 ринггита

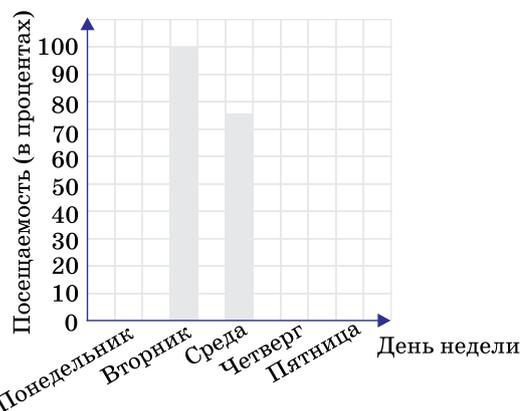
- A. 73.45
- B. 75.35
- C. 75.45
- D. 77.35

**Пример 5.** В таблице показана посещаемость школьниками урока музыки.

а) (2 балла) Найдите среднее число учеников, посещающих уроки музыки в течение недели.

б) (2 балла) Известно, что во вторник все ученики пришли на урок музыки. С помощью таблицы заполните столбиковую диаграмму: покажите долю (в процентах) школьников, посетивших урок.

День недели	Количество учащихся на уроке
Понедельник	
Вторник	
Среда	
Четверг	
Пятница	



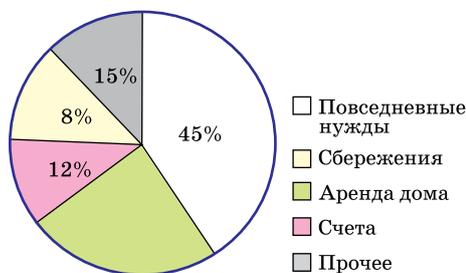
\* Ринггит денежная единица Малайзии.

**Пример 6.** На круговой диаграмме показано распределение месячного бюджета Пракаша в процентах. Процент расходов на аренду дома не указан.

а) (1 балл) Сколько процентов ежемесячного дохода Пракаш тратит на оплату аренды дома?

б) (2 балла) Пракаш платит за съём дома 850 ринггитов в месяц. Найдите суммарный бюджет Пракаша.

в) (2 балла) В некотором месяце выплаты по счетам возросли на 3%. Вычислите сумму, уплаченную по счетам в этом месяце.



Как видим, важная часть обучения малазийских школьников младших классов — выработка умения строить и читать разнообразные диаграммы, а также умения находить среднее значение и диапазон значений из имеющегося представления данных.

## Программа младшей средней школы

**7-й класс.** Учащиеся должны уметь формулировать статистические вопросы и собирать соответствующие постановке задачи данные. Уметь классифицировать данные, распределять их по категориям и строить таблицы частот. Уметь рассматривать дискретные и непрерывные числовые данные. Уметь строить представления для негруппированных данных и уметь обосновать выбор типа представления для данной задачи. Типы представления данных включают в себя столбиковые и круговые диаграммы, линейные и точечные графики, а также деревья и диаграммы вида «стебель-лист»<sup>6</sup>.

Уметь преобразовывать данные из одного типа представления в другое и обосновывать правильность действий. Уметь интерпретировать разные

представления данных, включая умение делать выводы и прогнозы. Уметь применять различные методы для построения представлений данных, в том числе с использованием программного обеспечения.

**8-й класс.** Учащиеся должны уметь находить моду, среднее значение и медиану негруппированного набора данных. Уметь делать выводы о том, как внесенные в набор данных изменения влияют на моду, среднее и медиану. Уметь определять интервалы, где находятся мода и среднее набора группированных данных. Уметь выбрать и обосновать использование подходящих мер центральной тенденции в задаче описания распределения данных, в том числе для наборов, содержащих экстремальные значения. Уметь определять моду, среднее и медиану по представлению данных. Уметь применять понятия мер центральной тенденции для аргументирования, формулирования прогнозов и заключений.

Также учащиеся должны владеть простыми понятиями теории вероятностей: знать, что такое статистическая вероятность<sup>7</sup> и теоретическая вероятность; знать определение вероятности события и вероятности противоположных событий; уметь производить действия с вероятностями, позволяющие перейти к обобщениям типа:  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ . [9]

**9-й класс.** Элементы статистики и теории вероятностей отсутствуют в программе. Время обучения распределено между такими темами, как алгебра, геометрия, тригонометрия и финансовая грамотность. [4]

Для учащихся средней школы Малайзии при переходе в 10-й класс существует возможность выбрать специализацию обучения (academic stream). Ученики средней школы, выбравшие естественно-научную или техническую специализацию, в 10–11-е годы обучения получают добавочный обязательный предмет «Дополнительная математика». Предмет предполагает углубленное изучение математики по школьной программе, в том числе по разделу «Статистика и теория вероятностей». (Программу для 10–11-х классов см. на с. 11.)

<sup>6</sup> Диаграмма «стебель-лист» — удобный и простой способ группировки числовых данных. В качестве интервалов группировки используются десятки. Например, набор чисел 4, 14, 18, 19, 25, 27 будет представлен диаграммой, изображенной на рисунке. Левый столбец — «стебель». Ряды справа — «листья». Прямоугольники, окружающие стебель и листья, обычно не изображают.

0	4
1	4 8 9
2	5 7

<sup>7</sup> Иногда так называют частоту события, наблюдаемого в серии одинаковых экспериментов. Название связано с тем, что назначение наблюдаемых частот в качестве вероятностей является одним (и часто единственно разумным) способом определения вероятностной меры. Мы предпочитаем говорить о частоте как об оценке неизвестной вероятности, удовлетворяющей всем свойствам вероятностной меры. Осмысленность частотной оценки вероятности обеспечивается законом больших чисел.

### Задачи НПР для 10–11-х классов

Национальная проверочная работа для средней школы (SPM) проводится в Малайзии в конце последнего года средней школы (11-й класс) и состоит из двух частей. Первая часть включает задачи с выбором ответа, вторая часть состоит из задач с развернутым решением. Рассмотрим некоторые задачи национальной проверочной работы за 2018 год.

#### Задачи по теме «Статистика и теория вероятностей» в национальной проверочной работе для средней школы по предмету «Математика»

**Пример 7.** На круговой диаграмме изображены различные типы книг, продаваемых в книжном магазине. Число книг о спорте вдвое больше числа научно-фантастических книг. Количество книг о приключениях — 272. Найдите число книг о хобби.



**Пример 8.** На картинке изображена итоговая таблица оценок, полученных группой учеников за проверочную работу. На сколько медиана отличается от моды?

Оценки	Подсчет
20	
21	
22	
23	
24	

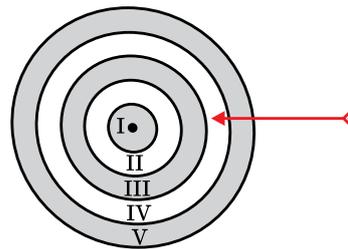
A. 0,6  
 B. 1  
 C. 2,4  
 D. 3

**Пример 9.** В школьных соревнованиях принимают участие синяя, желтая и красная команды. В синей команде 4 участника. Вероятность выбрать участника из желтой или красной команды равна  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{3}$  соответственно. Определите, сколько всего было участников соревнований.

- A.12      B.16      C.20      D.24

**Пример 10.** На рисунке показана мишень для стрельбы из лука с пятью концентрическими кольцами одинаковой ширины. Радиус ми-

шени 50 см. В мишень попала стрела. Найдите вероятность того, что стрела попала в область IV.



- A.  $\frac{7}{25}$   
 B.  $\frac{9}{25}$   
 C.  $\frac{16}{25}$   
 D.  $\frac{18}{25}$

**Пример 11.** В таблице перечислены члены Общества Красного Полумесяца и Общества скорой помощи Святого Иоанна, которых проинструктировали, как оказывать помощь на мероприятиях, проходящих во время празднования Дня Флага. Два случайно выбранных члена этих обществ оказались на дежурстве в одном из мест празднования.

а) (2 балла) Перечислите все возможные исходы события в данном пространстве событий. Можно использовать букву А для обозначения Аймана и т.д.

б) Перечислив все возможные исходы событий, найдите вероятность того, что:

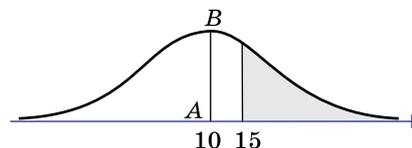
(4 балла) в данном месте дежурят мальчик и девочка;

(4 балла) в данном месте дежурят два члена одного и того же общества.

Члены общества	Общество Красного Полумесяца	Общество скорой помощи Святого Иоанна
Мальчики	Айман	Джон, Нэнси
Девочки	Фатин, Синди	Мэри

#### Задачи по теме «Статистика и теория вероятностей» в национальной проверочной работе для средней школы по предмету «Дополнительная математика»

**Пример 12.** На рисунке показан график распределения вероятностей<sup>8</sup> случайной величины  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ .



Известно, что  $AB$  — ось симметрии графика.

а) Найдите значение  $M$ .

б) (2 балла) Найдите  $P(5 \leq X \leq 15)$ , если площадь закрашенной области равна 0,38.

**Пример 13.** Волонтерская организация проводит курсы оказания первой помощи 4 раза в ме-

<sup>8</sup> Так в оригинале: «The diagram shows a probability distribution graph». Разумеется, речь идет о графике плотности вероятности.



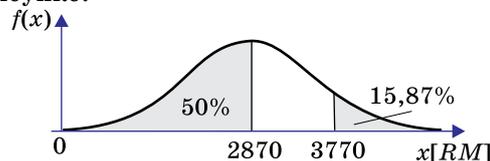
сяц по субботам с марта по сентябрь. (Считайте, что в каждом месяце четыре субботы.)

Сукрайя хочет посещать эти курсы, но одну субботу в месяц она должна сопровождать свою мать в больницу. Вероятность того, что Сукрайя будет посещать курсы каждую субботу, равна 0,8. Сукрайя получит сертификат о месячном посещении курсов, если сможет посетить по крайней мере три занятия за месяц.

а) Найдите вероятность того, что Сукрайя получит сертификат.

б) (4 балла) Сукрайя получит право пройти тестирование на умение оказать первую помощь, если у нее будет больше пяти сертификатов о месячном посещении. Найдите вероятность того, что Сукрайя сможет пойти на тестирование.

**Пример 14.** Исследования показали, что баланс на банковских картах пользователей имеет нормальное распределение, которое показано на рисунке.



а) (7 баллов) Найдите стандартное отклонение.

Если 30 пользователей выбраны случайным образом, найдите число пользователей, у которых баланс на карте составляет от 1800 до 3000 малайских ринггитов.

б) (3 балла) 25% пользователей имеют баланс меньше  $y$  ринггитов. Найдите  $y$ .

### Комментарий

На протяжении XX века то в России, то в Европе, то в США вспыхивали жаркие споры, насколько статистика и вероятность нужны школьной математике. Сейчас нигде сомнений не осталось: статистика и ее математическая основа — теория вероятностей — необходимы как часть общего знания и общей культуры. На примере Малайзии мы наблюдаем подход, в целом характерный для западных стран. Налицо явное преобладание наивной статистики.

Весьма обширный класс задач, особенно для старшей школы, представленный в рамках короткой статьи, дает представление о том, какие умения авторы школьной математики в Малайзии (и отчасти в странах SEAMEO) считают наиболее важными. Уделяется большое внимание разным способам представления данных, в том числе диаграммам, получившим широкое распространение в финансовой или демографической статистике. В программе и в задачах встречаются диаграммы *стебель-лист* и таблицы сопряженности (в программе курса «Дополнительная математика»), которые отсутствуют в российской школе, но широко распространены за пределами школьных классов. Безусловно, ясная и очевидная практическая направленность является сильной стороной малайзийской программы по статистике.

Другая важная особенность: программа делает явный акцент на развитии статистической культуры (здесь вольный перевод словосочетания *statistical thinking*). Это прослеживается в описании умений, которыми должны обладать школьники. Значительно меньше внимания уделяется статистическому мышлению или культуре в примерах задач, поскольку сам жанр итоговой аттестации, к сожалению, не позволяет

формулировать развивающие задания или задания с неоднозначной интерпретацией возможных рассуждений школьника: математика, как никак, наука детерминированная и излишних вольностей не терпит. Следует надеяться, что в числе обучающих задач встречаются задания на построение предположений, качественную оценку правдоподобности событий или гипотез, поиск нечетко очерченных общих признаков и т.п.

Видно, что авторы малайзийской программы стараются охватить практически-значимый круг тем, при этом, к сожалению, не очень хорошо отдавая себе отчет в том, каковы взаимосвязи между статистикой и вероятностью, а также между этими областями и другими разделами математики. Так часто бывает, когда школьные программы и учебники создаются в отрыве от научного сообщества. В погоне за практической ориентированностью авторы малайзийской программы упускают системный взгляд на предмет статистики и теории вероятностей. Появление элементов теории часто спонтанно — на уровне отдельных формул и фактов. Например, вместо определения рамок изучения рассеивания данных и связи этого явления со случайной изменчивостью и статистической устойчивостью программа фокусирует внимание на особенностях описательной статистики для группированных и негруппированных данных. В общей программе отсутствует упоминание о случайных величинах и их характеристиках, нет даже упоминания о законе больших чисел. Это обстоятельство отрывает теорию вероятностей от статистики, делая эти две области независимыми и не очень связанными в глазах учителя. Разумеется, нельзя составить полное представление о традициях изучения предмета лишь на основе национальной

программы, но смысловая разорванность курса бросается в глаза. Оторванность вероятности от статистики прослеживается не только из контекста. В программе явным образом противопоставляются «статистическая вероятность» и «теоретическая вероятность», то есть подразумеваются два разных подхода к описанию случайности, со стороны практики и со стороны теории, без указания на единство этих подходов.

Отсутствие в программах (даже в углубленной) упоминания о законе больших чисел — еще одно следствие несвязанности вероятности и статистики. Вместо того чтобы служить обоснованию статистической устойчивости, связать опытные и теоретические представления о случайном, теория вероятностей в представленной программе существует сама по себе, и неясно, что, собственно, является целью ее изучения.

Такая же фрагментарная картина наблюдается и в других отношениях. Например, в задачах из курса «Дополнительная математика» широко представлены свойства нормального распределения, но отсутствуют общие вопросы о распределениях и их характеристиках. Возникает впечатление, что тема «Нормальное распределение» изучается изолированно — без связи с другими случайными явлениями. Это впечатление может быть ошибочным, поскольку случайные величины и их характеристики присутствуют как элементы содержания в программе.

Обращают на себя внимание характерные ошибки и погрешности в формулировке заданий. В основном методического характера, но встречаются чисто математические. Обратите внимание на пример 10. Формально говоря, задачу решить невозможно: неизвестно, как распределены вероятности попадания по зонам мишени. Видимо, подразумевается, что речь идет о равномерном распределении. Наверно, это правильно: неравномерные геометрические распределения в школе изучать вряд ли следует, но беда в том, что как раз в случае стрельбы по мишени равномерного распределения не возникает.

Аналогичная проблема с примером 14: средства на банковских картах не могут подчиняться нормальному распределению, поскольку связаны с доходами населения, формирующимися в соответствии с совсем иными законами. К сожалению, авторы задачи полностью выдумали сюжет, хотя, казалось бы, явлений, подчиняющихся нормальному распределению, в природе великое множество.

Много вопросов вызывают задачи из примеров 11 и 13, где вероятностные пространства задаются небрежно в предположении, что возникающие исходы экспериментов равновозможны.

Разумеется, распределение волонтеров в день праздника не бывает *случайным*, а девушка Сукрайя вряд ли сопровождает маму в больницу по *случайным* субботам. Можно было бы не обращать внимания на такие оплошности, но они не случайны: роль равновозможных событий искусственно преувеличивается, а их исключительность прямо подчеркивается в общей программе 11-го класса и косвенно — в программе 11-го класса «Дополнительная математика», которая начинается с комбинаторных формул числа перестановок, размещений и сочетаний.

В поиске «жизненных сюжетов» и у нас, и за рубежом авторы задач часто приписывают равновозможность исходам там, где ее нет и в помине. В результате у школьников и учителей складывается ошибочное представление о том, что в любом опыте любые события равновозможны.

К сожалению, в подборке представленных задач не нашлось задач на применение формул сложения вероятностей или умножения вероятностей независимых событий. Это, разумеется, может оказаться случайностью, но, скорее всего, лишний раз свидетельствует о перекосе в сторону наивной статистики.

Наблюдая за развитием вероятностно-статистической линии в разных странах, мы в России стараемся не повторять чужих ошибок. Нам сильно помогает исторически сложившаяся тесная связь между школой и наукой. В России теснейшее сотрудничество ученых и учителей при написании учебников и программ — норма. Авторы российского ФГОС в части вероятности и статистики старательно соблюдают баланс между практической ориентированностью статистики и значимостью теории вероятностей. Появление вероятности в школе бессмысленно, если не вести речь о статистическом применении теории, которое начинается тогда, когда проявляется закон больших чисел. Следовательно, одной из главных целей изучения вероятности и статистики в школе должно стать формирование представлений о статистической устойчивости. Это мотивирует изучение случайных величин и их характеристик, при этом конкретные распределения не играют такой центральной роли, какую они играли в приложениях еще пару десятилетий назад — до появления персональных компьютеров. Распределения, даже очень важные, такие как показательное или нормальное, должны возникать как средства решения естественных задач в контексте получения общих знаний о случайности и ее проявлениях в разных экспериментах, а не изучаться как изолированные математические объекты.

## Программа для 10–11-х классов

В настоящее время программа для 10–11-х классов претерпевает очередные изменения. Мы размещаем текущую программу, которая оказалась доступна, в виде таблицы, разделяющей то, чему школьников учат, и то, что они должны будут уметь. Особенностью программы является раздел «Примечания», который часто содержит краткие, но емкие указания для учителя.

### 10-й класс. Программа по предмету «Математика». Статистика [5]

<i>Цели обучения</i> Учащиеся будут учить...	<i>Предполагаемая</i> учебная деятельность	<i>Результат обучения</i> Учащиеся будут уметь...	<i>Примечание</i>	<i>Термины</i>
1. Понимать, что такое интервальная группировка	Использовать данные из классных занятий, а также из других источников, чтобы познакомить учащихся с понятием интервала группировки. Обсудить критерии выбора подходящего шага группировки, если задан набор данных и число интервалов	(1) Разбивать набор данных на интервалы группировки, если задан один из интервалов; (2) определять концы интервала группировки, граничные интервалы. (3) Вычислять длину интервала (шаг) группировки; (4) определять интервалы группировки, если задан набор данных и число интервалов. (5) Определять подходящий шаг группировки для данного набора данных; (6) строить таблицу частот для набора данных	Длина интервала группировки равна разности правого и левого концов интервала	Статистика, интервал группировки, данные, группированные данные, длина интервала, таблица частот
2. Понимать, что такое мода и среднее арифметическое группированных данных, и использовать эти понятия		(1) Определять модальный интервал (тот, в который попало больше всего значений) для данного набора, пользуясь таблицей частот; (2) вычислять середину интервала; (3) уметь выводить формулу для среднего группированных данных; (4) оценивать среднее по таблице частот группированных данных; (5) объяснять, как выбранный шаг группировки влияет на точность вычисления среднего для конкретного набора группированных данных	Середина интервала есть полусумма левого и правого концов интервала	Мода, модальный интервал, среднее, середина интервала
3. Представлять и интерпретировать данные с помощью гистограмм с интервалами группировки одинаковой длины при решении задач	Обсудить различие между гистограммой и столбиковой диаграммой. С помощью графических калькуляторов исследовать, как шаг группировки влияет на вид гистограммы	(1) Строить гистограмму по таблице частот группированных данных. (2) Интерпретировать информацию, представленную гистограммой. (3) Решать задачи, требующие использования гистограмм. (4) Включая случаи из реальной жизни		Одинаковые интервалы группировки, гистограмма, вертикальная ось, горизонтальная ось
4. Представлять и интерпретировать данные с помощью многоугольника частот при решении задач		(1) Строить многоугольник частот, если дана: а) гистограмма, б) таблица частот; (2) интерпретировать информацию, заданную в виде многоугольника частот; (3) решать задачи, в которых возникает многоугольник частот	При построении многоугольника частот добавьте интервал с нулевой частотой перед первым интервалом и после последнего интервала. Включая задачи из реальной жизни	Многоугольник частот

<p>5. Понимать, что такое накопленная частота</p>		<p>(1) Строить таблицу накопленных частот для негруппированных и группированных данных. (2) Строить для этих данных графики накопленных частот</p>	<p>При построении графика накопленных частот используйте верхний конец интервала; добавьте интервал с нулевой частотой перед первым интервалом</p>	<p>Накопленная частота, негруппированные данные, график накопленных частот</p>
<p>6. Понимать, что такое меры рассеивания, и использовать это понятие при решении задач</p>	<p>Обсудить значение рассеивания, сравнив несколько наборов данных. Для этого можно использовать графические калькуляторы. Выполнить проект / исследование, проанализировать и интерпретировать данные. Представить результаты. Подчеркнуть важность честности и точности при проведении статистического исследования</p>	<p>(1) Определять размах набора данных. (2) По заданному графику накопленных частот находить медиану, первую и третью квартиль, межквартильный размах. (3) Решать задачи, используя различные представления данных и меры рассеивания</p>	<p>Для группированных данных размах равен разности между серединами последнего и первого интервалов группировки</p>	<p>Размах, меры рассеивания, медиана, первая квартиль, третья квартиль, межквартильный размах</p>

10-й класс. Программа по предмету «Математика». Теория вероятностей [5]

Цели обучения Учащиеся будут учить...	Предполагаемая учебная деятельность	Результат обучения Учащиеся будут уметь...	Примечание	Термины
<p>1. Понимать, что такое пространство элементарных исходов (событий)</p>	<p>Использовать конкретные примеры бросания костей и монет</p>	<p>(1) Определять, является ли данный исход возможным элементарным исходом эксперимента; (2) перечислять возможные элементарные исходы эксперимента; (3) определять пространство элементарных исходов данного эксперимента; (4) описывать пространство элементарных исходов, используя обозначения из теории множеств</p>		<p>Пространство элементарных событий, элементарный исход, эксперимент, возможный исход</p>
<p>2. Понимать, что такое случайные события</p>	<p>Обсудить: событие — это подмножество пространства элементарных исходов. Обсудить: в пространстве исходов бывают невозможные события. Обсудить: все пространство исходов тоже является событием</p>	<p>(1) Определять элементы пространства элементарных исходов, которые удовлетворяют заданным условиям. (2) Выписывать все элементы пространства элементарных событий, которые удовлетворяют заданным условиям, используя обозначения из теории множеств. (3) Определять, является ли данное событие возможным в имеющемся пространстве элементарных исходов</p>	<p>Невозможное событие — это пустое множество</p>	<p>Событие, элемент, подмножество, пустое множество, невозможное событие</p>

<p>3. Понимать, что такое вероятность события, и использовать это понятие при решении задач</p>	<p>Провести различные опыты с целью ввести понятие вероятности. Для программной симуляции испытаний можно использовать графические калькуляторы. Обсудить опыты, в которых возникают события с вероятностью 1 или 0. Подчеркнуть: значение вероятности всегда лежит между 0 и 1. Прогнозировать события, которые могут возникнуть в повседневной жизни</p>	<p>(1) Находить отношение числа благоприятных исходов событий, к общему числу опытов; (2) находить вероятность события с помощью достаточно большого числа испытаний. (3) Вычислять ожидаемое число благоприятных исходов событий, если дана вероятность события и число испытаний; (4) решать задачи с использованием вероятностей; (5) делать прогнозы о появлении исхода и принимать решения, основываясь на известной информации</p>	<p>Вероятность вычисляется на основе данных, полученных в результате испытаний</p>	<p>Вероятность</p>
---	--	--	--	--------------------

### 10-й класс. Программа по предмету «Дополнительная математика». Статистика [6]

<i>Цели обучения Учащихся будут учить...</i>	<i>Предполагаемая учебная деятельность</i>	<i>Результат обучения Учащиеся будут уметь...</i>	<i>Примечание</i>	<i>Термины</i>
<p>1. Понимать, что такое меры центральной тенденции, и использовать это понятие при решении задач</p>	<p>Для решения задач на меры разрешается использовать научные калькуляторы, графические калькуляторы и электронные таблицы. Учащиеся собирают данные из реальных ситуаций, чтобы определять меры центральной тенденции</p>	<p>(1) Вычислять среднее негруппированных данных; (2) находить моду негруппированных данных; (3) находить медиану негруппированных данных</p>	<p>Обсудите группированные и негруппированные данные</p>	<p>Меры центральной тенденции, среднее, мода, медиана, негруппированные данные, частота, таблица распределения, интервал группировки</p>
		<p>(4) Определять модальный интервал группированных данных из таблиц распределения частот; (5) по гистограмме находить моду</p>	<p>Только для одинаковых интервалов группировки</p>	
		<p>(6) Вычислять среднее группированных данных; (7) находить медиану группированных данных с помощью таблицы накопленных частот</p>	<p>Вывода формулы для медианы не требуется</p>	<p>Серединная точка, накопленные частоты, таблица распределения, кривая накопленных частот</p>
		<p>(8) Оценивать медиану группированных данных по кривой накопленных частот; (9) понимать, как меняются мода, медиана и среднее набора данных, когда: а) элементы множества изменяются на одинаковую величину, б) существуют экстремальные значения, в) данные добавляются или удаляются</p>		
		<p>(10) Уметь определять наиболее подходящую меру центральной тенденции для имеющегося набора данных</p>	<p>Для группированных и негруппированных наборов данных</p>	

<p>2. Понимать, что такое меры рассеивания, и использовать это понятие при решении задач</p>		<p>(1) Находить размах множества негруппированных данных;                  (2) находить межквартильный размах негруппированных данных;                  (3) находить размах группированных данных.                  (4–5) Находить межквартильный размах группированных данных из таблицы накопленных частот и из графика накопленных частот</p>	<p>Подчеркните, что сравнения двух наборов данных с помощью только мер центральной тенденции недостаточно</p>	<p>Межквартильный размах, меры рассеивания, экстремальное значение, левая точка интервала</p>
		<p>(6) Находить дисперсию и стандартное отклонение группированных и негруппированных данных;                  (7) находить стандартное отклонение группированных и негруппированных данных;                  (8) понимать, как изменяются размах, дисперсия и стандартное отклонение набора данных, если:                  а) данные изменяются на одинаковую величину,                  б) в наборе существуют экстремальные значения,                  в) данные добавляются в набор или удаляются из него.                  (9) Уметь сравнивать меры центральной тенденции и рассеивания двух наборов данных</p>		<p>Стандартное отклонение, интервал группировки, верхняя и нижняя квартиль, дисперсия числового набора</p>

11-й класс. Программа по предмету «Математика». Теория вероятностей [7]

Цели обучения Учащиеся будут учить...	Предполагаемая учебная деятельность	Результат обучения Учащиеся будут уметь...	Примечание	Термины
<p>1. Понимать, что такое вероятность события, и использовать это понятие</p>	<p>Обсудить: пространство равновозможных элементарных исходов (начиная с простых опытов, таких, как подбрасывание симметричной монеты).                  Для комбинированных опытов, построенных из более простых, можно использовать представление пространства элементарных событий в виде деревьев.                  При необходимости можно использовать графические калькуляторы.                  Обсудите события, имеющие вероятность 0 или 1</p>	<p>(1) Строить вероятностное пространство эксперимента с равновозможными элементарными исходами;                  (2) определять вероятность события в опыте с равновозможными элементарными исходами</p> <p>(3) Решать задачи, используя вероятности событий</p>	<p>Следует ограничиться пространствами с равновозможными элементарными исходами. Вероятность события <math>A</math> в таком пространстве <math>S</math> равна  <math display="block">P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}</math>                 Следует использовать представление в виде деревьев там, где это уместно</p> <p>В том числе задачи из реальной жизни, а также прогнозирование</p>	<p>Равновероятные события, пространство равновозможных элементарных исходов, дерево случайного эксперимента</p>

<p>2. Понимать, что такое вероятность противоположного события, и пользоваться этим понятием</p>	<p>Обсудить: события из реальной жизни, например, выиграть игру или проиграть, сдать экзамен или не сдать</p>	<p>(1) Записывать противоположное событие для данного события: а) словами, б) с помощью обозначений</p> <p>(2) Находить вероятность противоположного события</p>	<p>Событие, противоположное событию <math>A</math>, — это множество всех элементарных исходов, которые не благоприятствуют событию <math>A</math></p>	
<p>3. Понимать, что такое вероятность сложного события, и пользоваться этим понятием. Под термином «сложное событие» (combined event) здесь понимается событие, полученное объединением или пересечением событий</p>	<p>Использовать ситуации из реальной жизни для объяснения связи между объединением и пересечением событий и логическими союзами «или» и «и». Для нахождения исходов, благоприятствующих сложным событиям, удобно использовать дерево эксперимента, области на координатной плоскости</p>	<p>(1) Выписывать элементарные исходы, благоприятствующие объединению и пересечению событий <math>A</math> и <math>B</math>; (2) находить вероятности, выписав все элементарные исходы, благоприятствующие объединению и пересечению двух событий</p>		<p>Сложное событие</p>
	<p>Использовать таблицы сопряженности* (можно пользоваться газетами, статистическими данными), чтобы найти вероятности объединения или пересечения событий. Дайте ученикам задание построить дерево эксперимента по таблице сопряженности. Обсудить: ситуации, когда решения следует принимать, основываясь на оценках вероятностей событий (например, в бизнесе), решая такие задачи, как определение стоимости страхового полиса или выбор временного интервала для показа рекламы по телевидению; выражение «Вероятность — язык статистики»</p>	<p>(3) Решать задачи, используя вероятность комбинации событий</p>	<p>Подчеркнуть: знание вероятностей событий полезно при принятии решений; прогноз, основанный на вероятностях событий, не является точным или абсолютным</p>	

\* Пример таблицы сопряженности:

Пол работника	Способ добираться до работы		
	машинной	автобусом	другие
Мужчины	56	25	83
Женщины	50	42	37

11-й класс. Программа по предмету «Дополнительная математика». Перестановки и сочетания [8]

Цели обучения Учащихся будут учить...	Предполагаемая учебная деятельность	Результат обучения Учащиеся будут уметь...	Примечание	Термины
1. Понимать, что такое перестановка, и пользоваться этим понятием	Для объяснения понятия перестановки использовать ситуации из реальной жизни и компьютерные электронные таблицы	(1) Находить число перестановок $n$ различных объектов	Для объяснения понятия приведите числовые примеры. Используйте калькуляторы только после того, как ученики поймут понятие. Используйте обозначения $n! = n(n-1) \cdot \dots \times 3 \cdot 2 \cdot 1$ и $0! = 1$	Перестановка, факториал, порядок, упорядоченный
		(2) Находить число размещений из $n$ по $r$		
2. Понимать, что такое сочетание (число сочетаний), и пользоваться этим понятием	Исследовать сочетания на примерах из реальной жизни и с помощью компьютерных программ	(3) Находить число сочетаний из $n$ по $r$	Объясняйте понятие сочетаний, выписывая все возможные выборки. Используйте примеры для иллюстрации формулы $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$	

11-й класс. Программа по предмету «Дополнительная математика». Теория вероятностей [8]

Цели обучения Учащихся будут учить...	Предполагаемая учебная деятельность	Результат обучения Учащиеся будут уметь...	Примечание	Термины
1. Понимать, что такое вероятность, и пользоваться этим понятием	Для иллюстрации следует использовать ситуации из жизни, а для исследования свойств вероятности — раздаточный материал, компьютерные программы, калькуляторы	(1) Описывать пространство элементарных исходов эксперимента; (2) определять число элементарных исходов эксперимента; (3) находить вероятность события (4) Находить вероятность событий «происходит $A$ или $B$ » и «происходят $A$ и $B$ »	С использованием обозначений из теории множеств Подчеркните: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . Используйте диаграммы Эйлера–Венна	Эксперимент, пространство событий, событие, элементарный исход, равновероятный, вероятность Относительная частота
2. Понимать, что такое несовместные события, и пользоваться этим понятием	Использовать раздаточные материалы и графические калькуляторы для исследования свойств таких событий, а компьютерные программы — для симуляции экспериментов	(1) Определять, являются ли два данных события несовместными (2) Находить вероятности двух и более событий, являющихся несовместными	В том числе полная группа событий Ограничьтесь тремя несовместными событиями	Несовместные события, полная группа событий, независимость, деревья (tree diagrams)

3. Понимать, что такое вероятность независимых событий, и пользоваться этим понятием	Использовать раздаточные материалы и графические калькуляторы для исследования свойств независимых событий, а компьютерные программы — для симуляции экспериментов с независимыми событиями	(1) Определять, являются ли два данных события независимыми; (2) находить вероятность двух и трех независимых событий	Используйте в изучении дерево вероятностей	
--	---	--	--	--

### 11-й класс. Программа по предмету «Дополнительная математика». Распределения вероятностей [8]\*\*

Цели обучения Учащиеся будут учить...	Предполагаемая учебная деятельность	Результат обучения Учащиеся будут уметь...	Примечание	Термины
1. Понимать, что такое биномиальное распределение, и пользоваться этим понятием	Использовать примеры из реальной жизни для объяснения понятия биномиального распределения. Использовать графические калькуляторы и компьютерные программы для исследования свойств биномиального распределения	(1) Перечислять все возможные значения дискретной случайной величины (2) Определять вероятность события в биномиальном распределении (3) Строить графики биномиального распределения; (4) вычислять среднее, дисперсию и стандартное отклонение биномиального распределения; (5) решать задачи на биномиальное распределение	Включая характеристики испытаний Бернулли	Дискретная случайная величина, независимые испытания, испытания Бернулли, биномиальное распределение, среднее, дисперсия, стандартное отклонение
2. Понимать, что такое нормальное распределение, и пользоваться этим понятием	Объяснить понятие нормального распределения с помощью ситуаций из реальной жизни. Исследовать его свойства с помощью статистических компьютерных программ	(1) Описывать непрерывные случайные величины с помощью обозначений теории множеств; (2) находить вероятности $Z$ -значений для стандартного нормального распределения	Обсудите характеристики графиков нормального и стандартного нормального распределения. $Z$ называется стандартной переменной*	
		(3) Преобразовывать случайную величину, подчиняющуюся нормальному распределению, в случайную величину, распределенную по стандартному нормальному закону; (4) записывать вероятность события с помощью обозначений из теории множеств; (5) вычислять вероятность события; (6) решать задачи на нормальное распределение.		

Окончание на с. 21

\* Имеется в виду, что линейное преобразование случайной величины, имеющей нормальное распределение, в случайную величину, распределенную по стандартному нормальному закону, часто называется  $Z$ -преобразованием или стандартизацией, часто стандартную нормальную величину обозначают  $Z$ , хотя это обозначение не является общепринятым.

\*\* Список литературы на с. 21.