

ПРИКЛЮЧЕНИЯ СТАСА

Иван Высоцкий



СТАС РЕШАЕТ ЗАДАЧУ ПРО ДВУХ СЫНОВЕЙ

27 декабря. День.

– Предположим, что вероятность рождения мальчика 0,5. Тогда чему равна вероятность рождения девочки?

Если бы вопрос был задан кем-то другим, класс хихикал бы и отпускал шуточки. Но Лидия Павловна не располагала к веселью ни видом, ни тоном, ни всей историей знакомства. Вопрос кажется простым, но никогда не знаешь...

– Тоже 0,5, – отозвался Славка Поляков с первой парты, спиной чувствуя, что все надежды класс возлагает на него.

– Верно, – протянула Лидия Павловна. – А какова вероятность того, что в семье, где четверо детей, ровно два сына?

Стас подумал, что сыновей может быть от нуля до четырёх, всего пять вариантов, значит, вероятность ровно двух сыновей равна $1/5$. Первым порывом Стаса было заявить об этом вслух. Но посмотрев на Славку, Стас обуздал порыв. Славка думал. А если Славка думает, значит, есть над чем. Стас тоже решил подумать.

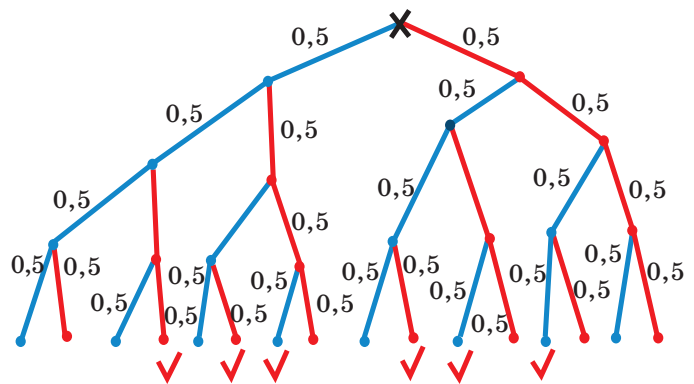
Так, нарисуем крестик, – это начало. Первым ребёнком в семье может быть сын, а может – дочь. Рождение сына будем рисовать синим карандашом, а дочки – красным за неимением розового.

Недавно Стас купил замечательные карандаши – синий и красный, в точности как у папы, и теперь таскал их с собой в школу, хотя с детства питал презрение ко всяким пеналам-фломастерам, считая эти пустяки уделом девчонок.

Проведём из начала два ребра – к синей точке и к красной. Около каждого ребра поставим вероятность 0,5. Дальше, второй ребёнок тоже может быть синим (в смысле – сыном), а может быть дочкой (то есть красной). Значит, для каждого

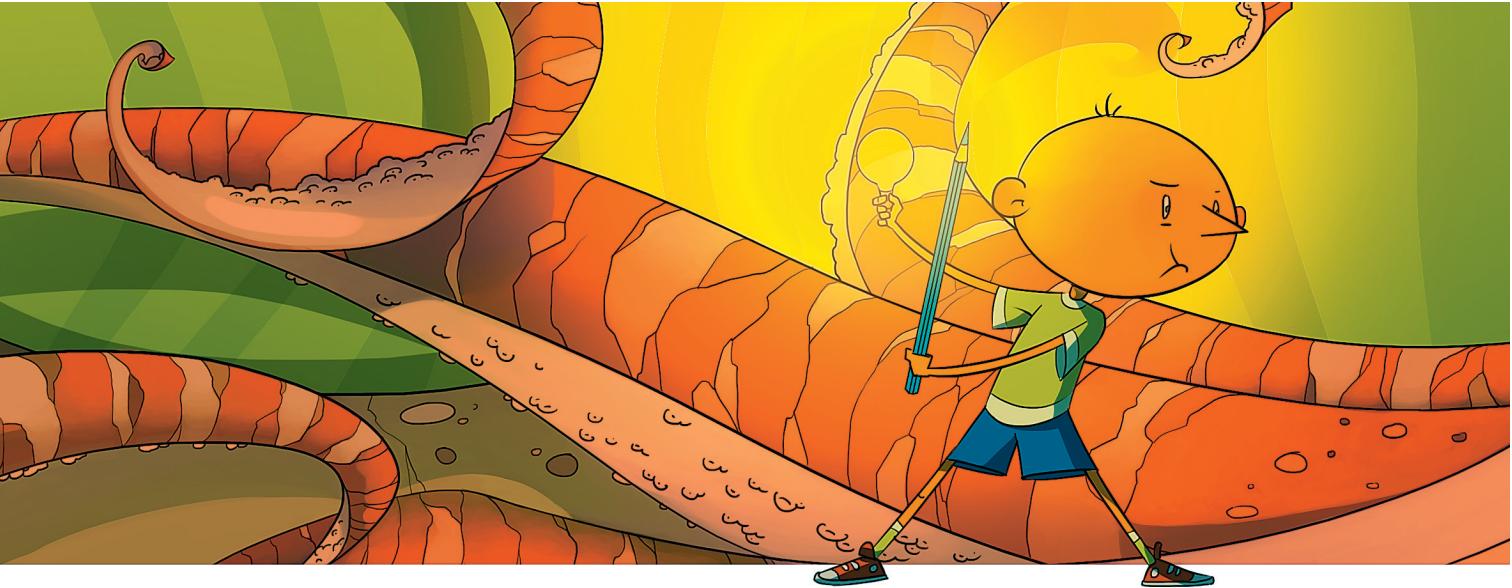
случая ещё по два ребра. И все вероятности равны 0,5 (условные вероятности, как теперь знал Стас¹). И так же для третьего ребёнка и для четвёртого.

Получился граф (так называется любая система точек, некоторые пары которых соединены отрезками), про который Стас знал, что он называется деревом. И правда, похоже на дерево или на куст, только почему-то этот куст растёт ветвями вниз. Дерево вышло «пятиэтажным» (или что там есть у деревьев?): первый этаж – начало и дальше по одному уровню для каждого следующего ребёнка в семье. Каждая цепочка, идущая сверху вниз, – это одна из возможностей. Всего цепочек получилось шестнадцать – именно столько разноцветных точек внизу. В каждой цепочке четыре ребра (столько детей в семье), а вероятность каждого ребра – это 0,5. Значит, вероятность² каждой цепочки равна $0,5^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.



¹ Про знакомство Стаса с условными вероятностями написано в №9 – 11 «Квантика» за 2012 г. Условная вероятность события А при условии В – это вероятность события А среди таких опытов, в которых событие В происходит.

² Чтобы найти вероятность каждой цепочки событий, нужно умножить вероятности рёбер вдоль этой цепочки. Это называется правилом умножения вероятностей.



В классе что-то происходило, о чём-то рассказывала Лидия Павловна, кто-то ходил к доске, где рисовались какие-то формулы, пару раз раздавались отмеренные порции коллективного смеха, но Стас, мягко говоря, отвлёкся, углубившись в задачу.

Теперь, – размышлял Стас, – нужно выбрать те цепочки, в которых ровно два синих ребра (мальчики) и ровно два красных (девочки). Немного подумав, Стас решил отмечать эти цепочки галочками, чтобы их было легче пересчитать. Таких цепочек получилось шесть. Шесть цепочек, по $\frac{1}{16}$ каждая, получается... получается вероятность $\frac{6}{16}$, то есть $\frac{3}{8}$. Не отрывая взгляда от рисунка, Стас поднял руку. Видимо, не к месту. Лидия Павловна удивлённо подняла брови:

– Что случилось, Станислав?

В этот момент Стас понял, – он что-то пропустил, потерял нить, выпал и вообще уже не в теме, но остановиться не смог, и заготовленный текст по инерции слетел с языка:

– Три восьмых!

– Что «три восьмых»? – вкрадчивый голос учительницы не оставлял надежд.

– Ну, это... вероятность... двух...

Класс напрягся, но смолчал. Лидия Павловна приторно заулыбалась.

– Наш класс установил эту истину десять минут назад. А скажи-ка нам, Стасик, чем весь класс занимался после этого?

Во-первых, Стас не выносил, когда его звали Стасиком. Во-вторых, он понятия не имел, что случилось в классе, да и в мире за последние десять минут. Удовлетворение от решённой задачи сменилось досадой. Но досаду прожужим позже, а сейчас нужно выпутываться. Стас опустил голову и принял вид молчаливо кающегося грешника. Расчёт оказался верен: Павловна сверлила его насмешливым взглядом ещё две секунды (ровно столько заслуживает оконфузившийся балбес) и вернулась к прерванному уроку.

Для себя Стас твёрдо решил больше никогда-никогда на математике не высываться, инициативы не проявлять и результаты не обнародовать.

Придя домой, Стас приступил к исполнению рутины бытия (так говорила мама) – разогрел суп, съел его, погулял с Патриком и сел за уроки. Завтра алгебра. Стас открыл тетрадь. Домашнее задание, конечно, не записано. Стас привычно обругал себя за головотяпство и набрал номер Славки Полякова. Пока



в телефоне тянулись гудки и гнусавый голос объяснял, что абонент не отвечает, Стас бездумно рассматривал дерево задачи про двух сыновей, вовсе не собираясь вспоминать сегодняшний позор. Теперь Стас подумал, что граф напоминает не дерево, а фантастического паука... или даже спрута с шестнадцатью ногами. Вдруг внутренний голос (Стас называл его «папой внутри»³) отчётливо произнёс:

– Интересно, а какие вероятности у других вариантов?

Не хочу! – мысленно завопил Стас, но было поздно: он уже считал цепочки. Пару раз сумма не сошлась – никак не выходило шестнадцать, но в конце концов получилось. Четыре синих ребра имеет только одна самая левая цепочка. Ещё одна – самая правая – вообще без синих рёбер. Три синих ребра у четырёх цепочек. Одно синее – ещё у четырёх. Стас выписал вероятности. Получилось вот что:

Нет сыновей	$p=1/16,$
1 сын	$p=4/16=1/4,$
2 сына	$p=6/16=3/8,$
3 сына	$p=4/16=1/4,$
4 сына	$p=1/16$

Пару минут Стас изучал свои каракули, пытаясь увидеть закономерность, но не увидел. Тогда он решил, что лучше выписать пары в таблицу – число мальчиков и число соответствующих цепочек.

Мальчиков	0	1	2	3	4
Цепочек	1	4	6	4	1

Казалось, что в таком виде искать закономерность проще, но в голову по-прежнему ничего путного не приходило. Единственное, что понял Стас, это что вариант 2 сына и 2 дочери самый вероятный. На этом научные изыскания прекратились, поскольку Славка обнаружил пропущенный вызов, позвонил, продиктовал номера домашней работы, и Стас без всякого энтузиазма взялся делать что положено, а не что интересно.

³ Читатели предыдущих приключений знают, что Стас иногда обращается к папе за помощью в математических вопросах. Когда папа далеко, Стас часто думает, что бы папа сказал, если бы был рядом. Поэтому «папа внутри» существует лишь в Стасовом воображении, но от этого не становится менее настоящим.

Продолжение следует.

Художник Виктор Пяткин



Здесь был
Ферма

$$\Sigma_i = mc^2$$

$$P(1) = 0.5$$

КАКОЙ ПРОГНОЗ ЛУЧШЕ?

Продолжение. Начало в №3.

27 декабря. Вечер.

После вечерней прогулки с Патриком Стас присоединился к родителям, которые на кухне обсуждали планы на Новый год. Оказывается, ночью звонила папина сестра Ольга Панина-Василопулу и приглашала в гости.

– Звонила в час ночи, Лёш, совсем одичала на своём острове, – смеялась мама, – она, что, о разнице во времени не слышала?

Стас знал, что тётя Оля уже давно живёт с мужем на Кипре и у них четверо детей. Папа иногда мечтал, что надо бы слетать и повидать племянников, но никогда на это не находилось времени. Четверо тётиолиных детей тут же пробудили ряд ассоциаций, и Стас решил похвастать своими успехами.

– Пап, у нас в школе была задачка. Смотри – в семье четыре ребёнка. Самое вероятное, это что там два сына, так? – Стас начал издали, чтобы как бы невзначай дать понять, что он уже во всём разобрался. Он ждал, что папа кивнёт головой, и уже заготовил следующий вопрос-утверждение. Но папа удивил его:

– Нет. Вероятнее, что там не два сына.

– Подожди, – Стас энергично запротестовал, поскольку был уверен в своём решении. – Вероятность двух мальчиков равна трём восьмым, я считал.

Папа рассеянно кивнул головой:

– Да, если только вероятность рождения мальчика – одна вторая. На самом деле обычно чуть выше.

Стас понял, что Лидия Павловна не зря начала урок с уточнения этой детали. Только почему учителя в школе, когда что-то говорят, никогда не говорят,

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Иван Высоцкий

почему они это говорят? Это, наверно, главный учительский секрет. Стас продолжил:

– А вероятность того, что там один сын, равна одной четвёртой. То же самое для трёх сыновей.

Папа опять кивнул.

– А вероятность того, что только девочки...

И снова кивок.

– Ну, видишь, значит, самое вероятное – два сына.

– Стас, ты же сам сказал, что вероятность того, что из четырёх детей ровно два мальчика, равна трём восьмым. Тогда скажи: какова вероятность того, что там НЕ ДВА мальчика, а какое-то другое количество?

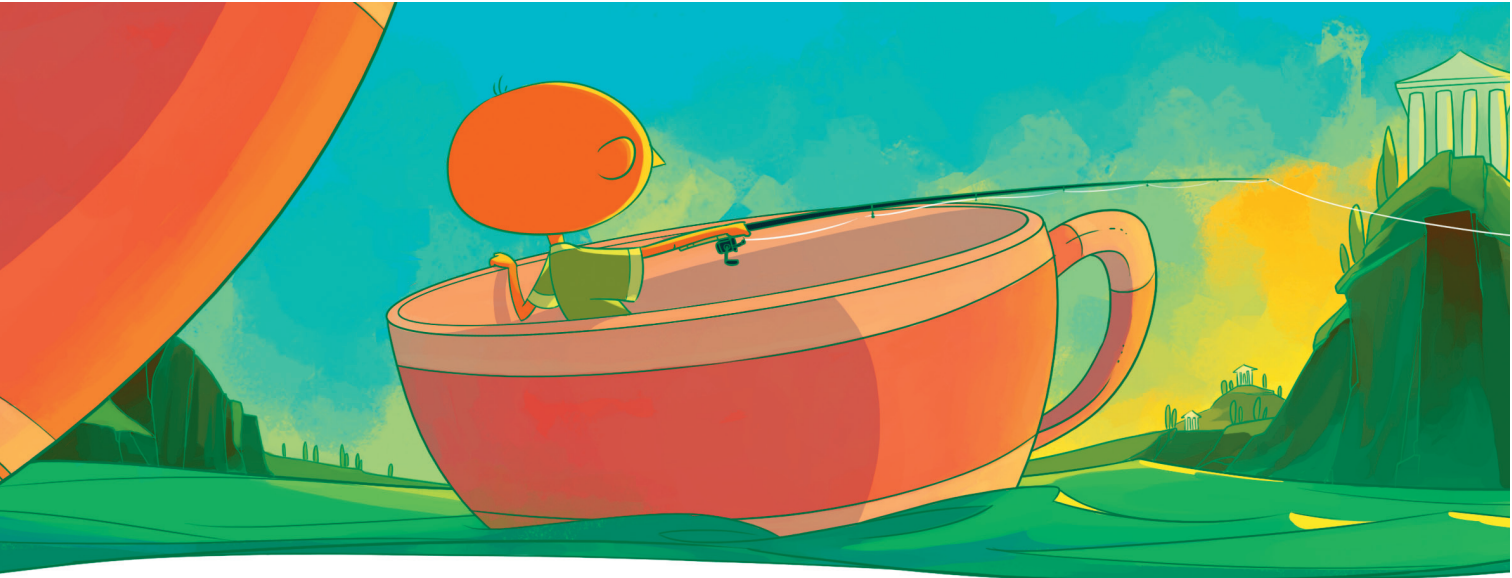
– Пять восьмых, – не задумываясь, выпалил Стас и вдруг понял, что пять восьмых БОЛЬШЕ, чем три восьмых. Значит, папа прав, вероятнее всего, что в семье не два сына. Но, с другой стороны, два сына вероятнее, чем три или чем четыре. Два сына вероятнее, чем один или чем вообще одни девочки. То есть... Как же это сказать...

Тем временем папа вышел из рассеянной задумчивости, – вероятно, решил какой-то свой вопрос, – и полностью переключился на задачу про мальчиков. Теперь он взял инициативу в свои руки.

– Предположим, что в некоторой семье четверо детей...

– Как у тёти Оли.

– Ну да, как у тёти Оли. Предположим, что мы едем к ним в гости и хотим купить подарки детям. Каждому мальчику мы хотим купить...



– Спиннинг! – выдохнул Стас. – Карбоновый, телескопический, с катушкой на 6 подшипников.

Папа посмотрел на Стаса и сделал в голове какую-то пометку. По крайней мере, Стасу хотелось так думать.

– Хорошо, мальчикам спиннинги. А девочкам...

– Розовые наклейки. С принцессами. И с блёстками. Они будут рады.

Папа осуждающе посмотрел на сына.

– Ну хорошо, пап, давай им купим... не знаю... тоже спиннинги... но только розовые.

Папа, не удержавшись, фыркнул. Вмешалась мама:

– А девочке я бы подарила чайный сервиз. Я вчера видела в интернете – такие изящные по тысяче рублей.

Стас веселился вовсю:

– Точно! Чашки. Розо... – и прикусил язык, придавленный к стулу негодующим взглядом четырёх родительских глаз. Собственно, Стас и сам не понимал, почему вдруг прицепился к абстрактным девчонкам. Тем более, что ничего против конкретных девчонок он не имел, а если говорить, например, о Наташке Смирновой...

– Предположим, что мы не знаем, сколько мальчиков и сколько девочек. Какой наилучший прогноз можно дать? – папа мудро не предпринял воспитательных действий и вернулся к формализации модели, как он это иногда называл.

– Лёша, ты правда не помнишь, сколько у тебя племянниц, а сколько племянников? – не выдержала мама.

– Это неважно, – папа выглядел как-то смущённо, – мы же просто предполагаем...

– Ну, так я вам точно скажу.

Папа и Стас одновременно закричали:

– Не надо!

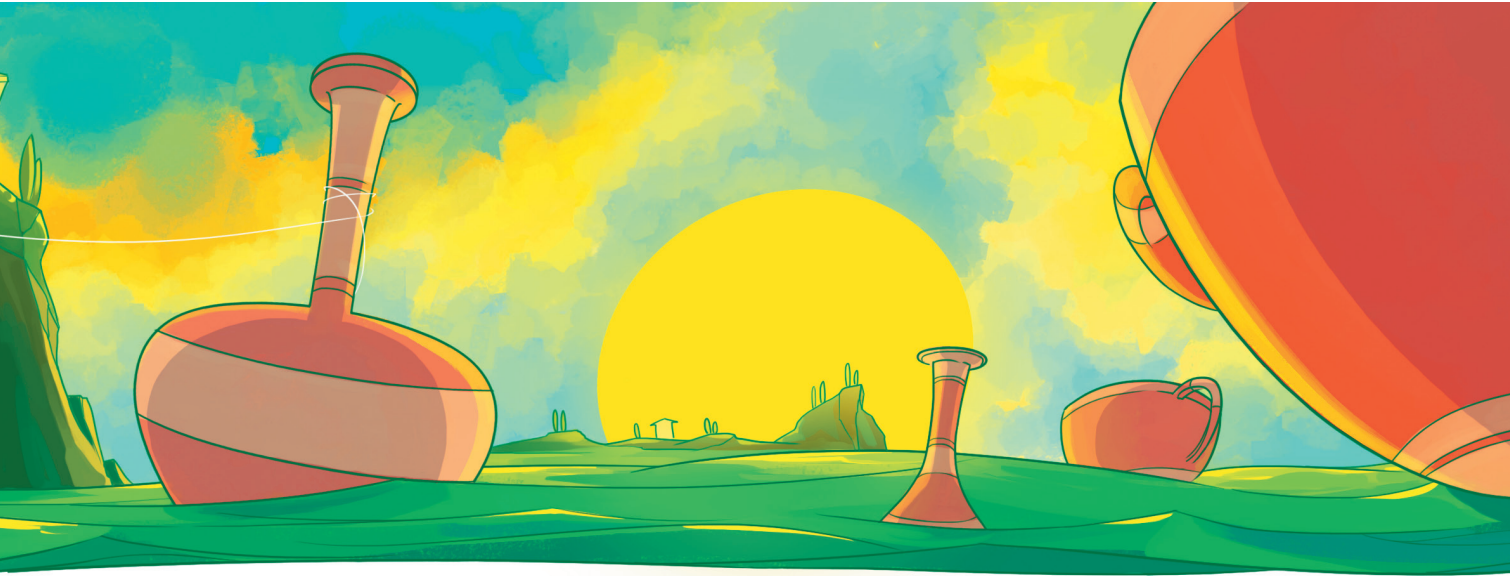
– Лен, ну что ты, – объяснил папа, – вся интрига пропадёт. Не порть задачу.

– Лучший прогноз – два мальчика и две девочки, – заявил Стас, уже понимая, что прогноз этот не слишком хороший.

– Верно. Это лучший прогноз. И очень определённый. Но только насколько ему можно доверять?

– Не очень, – вздохнул Стас. – Вероятность того, что он верный, всего $3/8$.

– Мы купим два спиннинга и два сервиза, и обойдётся это нам, ну скажем...



по тысяче за подарок, значит, всего в четыре тысячи рублей.

Стас засомневался, что спиннинг мечты стоит тысячу, но смолчал. Папа продолжил:

– Если наш прогноз неверен, то нам придётся либо дарить кому-то из девочек спиннинги, либо кому-то из мальчиков сервизы, либо где-то докупать подарки. И вероятность этого $5/8$. Многовато. Может быть, мы можем сделать менее определённый, но более надёжный прогноз?

Стас примерно минуту думал, что значит «менее определённый». Потом догадался:

– Предположим, что мальчиков от одного до трёх. Тогда девочек тоже от одной до трёх. И вероятность этого, – Стас попытался сложить вероятности этого в уме, но ум отказывался помнить сразу так много числителей и знаменателей. Стас сбегал за тетрадью и ручкой. С записями оказалось проще.

– Вероятность этого равна

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}.$$

– Это намного лучше, да? Теперь вероятность ошибки всего $\frac{1}{8}$.

– Но теперь нам нужно шесть подарков. Получается шесть тысяч, а не четыре.

– Это плата за повышение надёжности прогноза. Заметь, надёжность повысилась в два с лишним раза, а цена всего в полтора раза.

– Утешает. А что мы будем делать с лишними подарками?

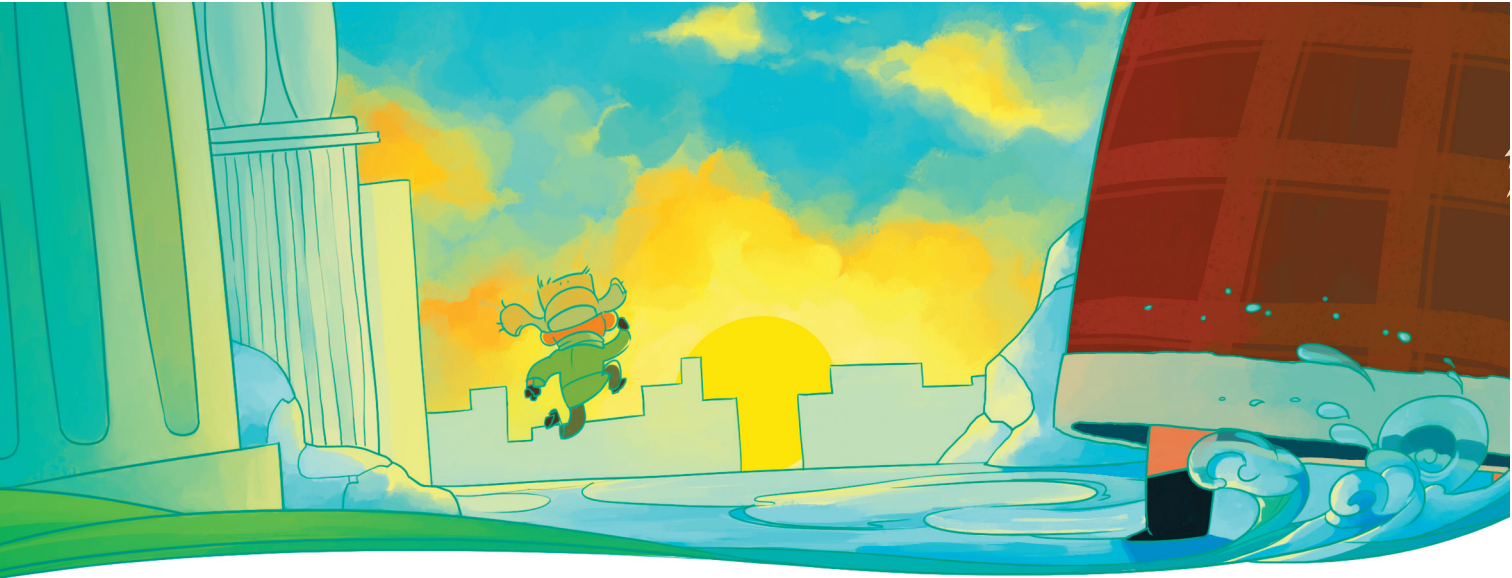
– Если останется спиннинг, – хитро улыбнулся папа, – возьмишь себе.

– А если чашки?

– Подаришь своей Смирновой ко дню рождения, – мягко сказала мама.

Красный, как рак, Стас в страшном смущении выкатился из кухни.

Немного отойдя от маминой бестактности, Стас вернулся к незаконченным размышлениям. Сначала он сформулировал для себя итог: наиболее вероятное событие может быть вероятнее всякого другого, но менее вероятно, чем все другие события, вместе взятые. То есть наилучший прогноз может быть не очень-то и хорошим. Если прогноз очень определённый, он может быть очень ненадёжным. А если прогноз очень неопределённый, то он бессмысленный. Значит, нужно искать промежуточный вариант –



компромисс (Стас недавно узнал это слово, и оно ему очень нравилось).

Интересно, а что если детей не четверо, а пятеро? Стас некоторое время рисовал граф для пяти детей, потом для шести (на это потребовалось три попытки, два двойных листа и почти час времени). Потом выписал таблицы для числа цепочек. Немного подумал и пошёл спать. Уже лёжа в постели, Стас ещё раз перебирал в уме полученные вероятности. И вдруг вскочил, подбежал к столу, включил лампу. Положил рядом таблицы для четырёх, пяти и шести детей. Изучал их некоторое время, а затем широко и счастливо улыбнулся – вот она, закономерность! Но разобраться, почему она такая, сил уже не было. Потом Стас вернулся к дивану, где уже расположился Патрик, заставил пса подвигаться, устроился поуютнее и заснул.

28 декабря. Утро

Утро последнего школьного дня в уходящем году не отличалось от других школьных утр. После утренней прогулки с папой Патрик пришёл к Стасу и засунул под одеяло бороду, увешанную сосульками. Подъём. Густой запах оладий из кухни. За окном в темноте та-рахтение трактора, убирающего снег.

Стас закинул в себя завтрак, выпил чаю и посмотрел утреннюю сводку погоды. Телевизор обещал от минус пяти до минус трёх. Выбежав из подъезда, Стас поздно заметил вал водянистой снежной каши, устроенный трактором в борьбе за благоустройство. Остановиться не смог и с разбегу прыгнул. Неудачно – налетел на пожилую соседку Татьяну Петровну. Та устояла, но запричитала, заохала и обвинила во всём почему-то синоптиков.

– Обещают, обещают мороз, всё врут. Вон слякоть какая. Когда ж зима начнётся?

Стас встал на защиту науки:

– Татьяна Петровна, они дают лучший из возможных прогнозов. Но он слишком определённый, а поэтому не очень надёжный. А если увеличить надёжность прогноза, потеряется определённость. Это компромисс, Татьяна Петровна, понимаете?

Соседка проводила взглядом фигурку, прыгающую по двору в попытке не промочить ноги. Потом ухватила покрепче за перила подъезда и пробормотала:

– Иди уже в школу, тоже мне – компромисс.