Справочник

В справочнике в алфавитном порядке даны разъяснения некоторых терминов, встречающихся в книжке. Не всех. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями, поэтому такие термины как «вероятность», «случайная величина», «случайное событие», «среднее арифметическое» и т. п. здесь не разъясняются. Не разъясняются также термины, встречающиеся в самом справочнике, если они отсутствуют в задачах. Например, понятия непрерывной и дискретной случайной величины, плотности распределения не разъясняются.

В случае необходимости приводятся примеры, а в отдельных случаях — решения задач с помощью описанных методов.

Беспорядок в перестановке. Беспорядком в перестановке называют комбинацию двух элементов $\begin{pmatrix} a & b \\ s(a) & s(b) \end{pmatrix}$ в этой перестановке, где $a < b$, а $s(a) > s(b)$ или наоборот. Например, в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ два беспорядка: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Бинарная случайная величина — случайная величина, которая принимает только два значения 0 и 1.

Если вероятность единицы равна p, а вероятность нуля равна $q = 1 - p$, то распределение такой величины можно записать в виде $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$. Такое распределение называют распределением Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия: $\mathrm{E}I = p$, $\mathrm{D}I = qp$.

Биномиальное распределение вероятностей. Пусть проводится n одинаковых и независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом отдельном испытании. Случайная величина S — «Число наступивших успехов» имеет биномиальное распределение:

$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

Число испытаний n и вероятность p, от которых зависит распределение, называются параметрами биномиального распределения.

Математическое ожидание: $ES = np$. Дисперсия: $DS = npq$.

Гармоническое число H_n — сумма всех чисел, обратных натуральным от 1 до n:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Последовательность гармонических чисел расходится, т. е. гармонические числа возрастают до бесконечности с ростом n. Правда, возрастание медленное: H_n растёт приблизительно как $\ln n$. Более точно можно утверждать:

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma = 0{,}5772\ldots$$

Число γ называется константой Эйлера или ***константой Эйлера—Маскерони***. Это равенство даёт практический способ приблизительного вычисления H_n: уже при не очень больших n число H_n можно заменять числом $\ln n + 0{,}577$.

Гармоническое число второго порядка H_n^2 — сумма всех чисел, обратных натуральным квадратам от 1 до n^2:

$$H_n^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Последовательность гармонических чисел второго порядка сходится к $\frac{\pi^2}{6}$.

Геометрическая вероятность. Иногда ***случайный выбор*** рассматривается для непрерывных совокупностей. Например, можно случайно выбирать точку x из отрезка $[a; b]$ прямой или кривой линии. Случайность при этом значит, что вероятность выбранной точки попасть в меньший отрезок $[c; d]$ внутри $[a; b]$ пропорциональна длине $[c; d]$. При этом сам отрезок $[c; d]$ рассматривается как событие «Точка попала в $[c; d]$». Вместо $\mathrm{P}(c \leqslant x \leqslant d)$ можно кратко записать $\mathrm{P}([c; d])$:

$$\mathrm{P}([c; d]) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Аналогично, при случайном выборе точки из некоторой фигуры F иногда разумно считать, что вероятность того, что выбранная точка попадёт в фигуру A внутри F, пропорциональна площади фигуры A. В этом случае обычно отождествляют фигуру A и событие «Выбранная точка попала в A»:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{S_A}{S_F}.$$

Так же можно определить вероятность отношением объёмов, если точка выбирается из трёхмерной фигуры.

Такой подход к определению вероятности событий называют геометрическим. Проще говорят о геометрической вероятности (не следует путать с ***геометрическим распределением***).

Геометрическое распределение. Пусть одинаковые и независимые ***испытания*** с вероятностью успеха p в каждом проводятся до наступления первого успеха. Тогда случайная величина X — «Число проведённых испытаний» имеет геометрическое распределение

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p,$$

где $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

Математическое ожидание: $\mathrm{E}X = \frac{1}{p}$.

Дисперсия: $DX = \frac{q}{p^2}$.

Гипергеометрическое распределение. Предположим, что имеется множество из N объектов, из которых K — особые (например, чёрные). Выбираем случайным образом n объектов (без возвращения). Успехом будем считать извлечение особого объекта. Случайная величина S — «Число успехов» имеет гипергеометрическое распределение:

$$\mathrm{P}(S = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Математическое ожидание: $\mathrm{E}S = n\frac{K}{N}$.

Дисперсия: $\mathrm{D}X = \frac{Kn(N-n)(N-K)}{N^2(N-1)}$.

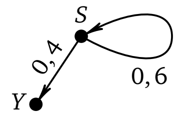
Графы с циклами. Иногда в эксперименте одно и то же событие может наступать несколько раз и даже неопределённо много раз. Например, при стрельбе можно много раз промахнуться, прежде чем попасть в цель. В таких случаях вместо ***дерева эксперимента*** часто удобно нарисовать граф с циклом. Принцип тот же. Направление переходов можно изображать стрелками.

Пример. Андрей пытается сдать тест по английскому языку и оценивает свои шансы каждый раз как 0,4.

а) Найдите вероятность того, что он сдаст свой тест, если число попыток не ограничено.

б) Какова вероятность, что Андрей сдаст не позже, чем с третьей попытки?

б) Сколько попыток разрешить Андрею, чтобы он сдал тест с вероятностью не менее чем 0,8?



Решение. Граф в этом случае выглядит так: от начальной точки S ведут две стрелки — первая к событию Y (сдал) и вторая — снова к началу S, образуя петлю.

а) Событию Y благоприятствуют все цепочки, начинающиеся в S и заканчивающиеся в Y: SY, SSY, $SSSY$, $SSSSY$ и т. д.

Вероятность события Y находится как сумма вероятностей этих цепочек, которые образуют геометрическую прогрессию:

$$\mathrm{P}(Y) = \mathrm{P}(SY) + \mathrm{P}(SSY) + \mathrm{P}(SSSY) + \ldots =$$
$$= 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 + \ldots = \frac{0{,}4}{1-0{,}6} = 1.$$

б) Событию A «Сдаст не позже, чем с третьей попытки» благоприятствуют такие же цепочки, но в них не более трёх переходов: SY, SSY, $SSSY$. Вероятность — сумма конечной геометрической прогрессии:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(SY) + \mathrm{P}(SSY) + \mathrm{P}(SSSY) = 0{,}4 \cdot \frac{1-0{,}6^3}{1-0{,}6} = 0{,}784.$$

в) Чтобы ответить на этот вопрос, нужно подобрать такое число попыток, чтобы вероятность сдать превзошла 0,8. Трёх попыток, как мы видели, недостаточно. Добавим четвёртую. Вероятность сдать не позже, чем с четвёртой попытки равна

$$0{,}784 + \mathrm{P}(SSSSY) = 0{,}784 + 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}784 + 0{,}0864 > 0{,}8.$$

Ответ: а) 1; б) 0,784; в) 4.

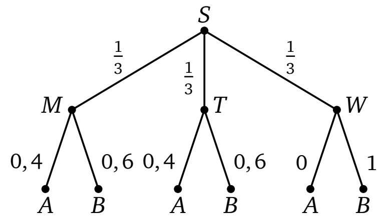
Дерево вероятностей или дерево эксперимента. Очень многие эксперименты, где возникает несколько взаимосвязанных событий, удобно представить в виде ветвящегося процесса. Изображать это лучше всего с помощью графа — дерева, растущего из вершины S (начало). От этой вершины направляются рёбра к возможным событиям. Дальше — к следующим и т. д. Около каждого ребра можно подписать условную вероятность соответствующего события.

Поясним на примере, как строится дерево эксперимента и как с помощью деревьев решаются задачи.

Пример. Учёный приехал в Гамбург на конференцию. Доклады проводятся в двух корпусах университета А и В в течение трёх дней с понедельника по среду. Доклад нашего учёного с равными вероятностями может быть назначен на любой из трёх дней. 40 % всех докладов в понедельник и 40 % всех докладов во вторник проводятся в корпусе А. В среду все доклады проходят в корпусе В, поскольку в А готовится церемония закрытия конференции. Найдите:

а) вероятность того, что доклад нашего учёного назначен в корпусе В;

б) вероятность того, что доклад нашего учёного назначен на вторник, если известно, что он пройдёт в корпусе В.

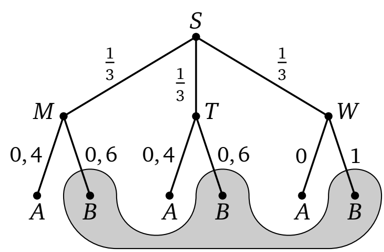


Построение дерева видно из рисунка. Мы не рисуем стрелки, считая, что все рёбра направлены вниз. Элементарными событиями в этом эксперименте являются цепочки рёбер, ведущие от начала S к конечным точкам A и B. Например, элементарное событие SMA состоит в том, что доклад назначен на понедельник (Monday) и проходит в корпусе А.

Вероятности, надписанные около рёбер — условные. Например, вероятность 0,4 у ребра — это вероятность того, что доклад будет в корпусе А при условии, что он во вторник (Tuesday). Поэтому сумма вероятностей в каждой точке ветвления равна 1.

Решение. а) Событию B благоприятствуют три элементарных события — это цепочки SMB, STM и SWB. Вероятность каждой легко найти, пользуясь правилом умножения:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(SMB) + \mathrm{P}(STB) + \mathrm{P}(SWB) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{11}{15}.$$



б) Теперь нам известно, что доклад будет в корпусе В. Покажем это событие на рисунке закрашенной областью.

Цепочки, не приводящие к В, нам теперь не нужны. Вероятность того, что доклад назначен на вторник при условии, что он в корпусе В — условная. Она равна

$$\mathrm{P}(T|B) = \frac{\mathrm{P}(T\cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Вероятность $\mathrm{P}(B)$ мы уже нашли. А вероятность $\mathrm{P}(T\cap B)$ в числителе — это вероятность цепочки STB:

$$\mathrm{P}(T\cap B) = \mathrm{P}(STB) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 = \frac{1}{5}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}(T|B) = \frac{\mathrm{P}(STB)}{\mathrm{P}(SMB)+\mathrm{P}(STB)+\mathrm{P}(SWB)} = \frac{1\cdot 15}{5\cdot 11} = \frac{3}{11}.$$

Более сложные эксперименты требуют более сложных деревьев, но суть остаётся той же самой. Надеемся, приведённого примера достаточно для понимания метода.

Дисперсия случайной величины — математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания (средний квадрат отклонения):

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2.$$

Чаще всего для вычислений применяется формула

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2 X,$$

которая получается из определения непосредственными преобразованиями.

Для дисперсии верны свойства:

1. $\mathrm{D}a = 0$ (a — произвольное число).
2. $\mathrm{D}(aX + b) = a^2\mathrm{D}X$ (a и b — произвольные числа).
3. Для ***независимых случайных величин*** $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Не все случайные величины имеют дисперсию (например, не имеют дисперсии те величины, которые не имеют математического ожидания).

Часто в литературе употребляется обозначение σ^2 — обычно для нормального распределения, но иногда и более широко. Квадрат подчёркивает квадратичную природу дисперсии.

Закон больших чисел — теоремы, утверждающие разные виды ***статистической устойчивости***. Наиболее простая и исторически первая из них — теорема Бернулли: с ростом числа одинаковых ***испытаний*** вероятность малого различия между частотой успеха и его вероятностью стремится к единице. Иными словами, частота успеха статистически устойчива и с ростом числа испытаний приближается к вероятности этого события.

Индикатор события A — ***бинарная случайная величина***, которая принимает значение 1, если событие A произошло, и значение 0, если событие A не произошло. Часто используется обозначение I_A. Если вероятность события A равна $\mathrm{P}(A)$, то распределение I_A выглядит так:

$$I_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \mathrm{P}(A) & \mathrm{P}(A) \end{pmatrix},$$

а поэтому математическое ожидание равно вероятности: $\mathrm{E}I_A = \mathrm{P}(A)$. Это равенство связывает математическое ожидание случайной величины и вероятность события. Индикаторы обладают полезными свойствами.

1. Индикатор ***противоположного*** события: $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$.

2. Индикатор ***пересечения*** двух событий равен произведению их индикаторов: $I_{A\cap B} = I_A I_B$. То же верно для любого числа событий.

3. Индикатор ***объединения*** двух событий: $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_A I_B$. Это равенство не случайно напоминает ***формулу сложения вероятностей***. Они тесно связаны.

Индикаторы широко применяются при решении задач (см. ***метод индикаторов***).

Испытание (испытание Бернулли) — случайный опыт, в котором может наступить один из двух элементарных исходов. Эти исходы условно называют успехом и неудачей. Пример испытания Бернулли — бросание одной монеты.

Очень многие эксперименты можно свести к последовательности независимых и одинаковых испытаний.

Комбинаторное правило умножения гласит, что если есть n предметов первого вида и m предметов второго вида, то из них можно составить ровно nm упорядоченных пар: на первом месте предмет первого вида, на втором — второго. Например, с помощью четырёх цифр 1, 2, 3, 4 и трёх букв А, Б и В можно пронумеровать $4 \cdot 3 = 12$ классов начальной школы: от 1А до 4В.

Константа Эйлера—Маскерони γ — это предел, к которому с ростом n стремится разность между ***гармоническим числом*** H_n и логарифмом $\ln n$. Неизвестно, рационально это число или нет, но если рационально, то период его десятичной записи очень велик. Десятичная запись γ начинается так:

$$\gamma = 0{,}577215664901532860606512090082402431042159335939\ldots$$

Малая теорема Ферма. Если n — произвольное натуральное число, а p — простое, то $n^p - n$ делится на p. Теорема в сюжете о покраске каруселей присутствует в задаче 10.7.

Математическое ожидание случайной величины. Если дискретная случайная величина X имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

то математическое ожидание $\mathrm{E}X$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Аналогичная сумма, но бесконечная, получается, если количество значений случайной величины бесконечно:

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n + \ldots$$

Бывают случайные величины, у которых математическое ожидание не существует (придумайте пример).

Для случайных величин, имеющих математическое ожидание, выполняются следующие свойства.

1. $\mathrm{E}a = a$ (a — произвольное число).
2. $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}X + b$ (a и b — произвольные числа).
3. $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$.
4. Для ***независимых случайных величин*** $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$.

Если случайная величина непрерывна и распределена на интервале $(a; b)$ с плотностью распределения $y = p(x)$, то

$$\mathrm{E}X = \int\limits_a^b xp(x)dx.$$

Этот интеграл может иметь бесконечные пределы (несобственный интеграл), если случайная величина не ограничена. Если интеграл не существует, то математического ожидания у такой случайной величины нет.

Метод индикаторов — общее название для способа решения разных задач с применением ***индикаторов*** событий. Покажем, как работает метод для вычисления вероятностей, математического ожидания и дисперсии.

1. Докажем ***формулу сложения вероятностей*** для трёх событий A, B и C. Пусть I_A, I_B и I_C — индикаторы этих событий. Тогда событие $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ имеет индикатор

$$\begin{aligned} I_{\overline{A\cup B\cup C}} &= I_{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}} = (1 - I_A)(1 - I_B)(1 - I_C) = \\ &= 1 - I_A - I_B - I_C + I_AI_B + I_AI_C + I_BI_C - I_AI_BI_C = \\ &= 1 - I_A - I_B - I_C + I_{A\cap B} + I_{A\cap C} + I_{B\cap C} - I_{A\cap B\cap C}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $I_{\overline{A\cup B\cup C}} = 1 - I_{A\cup B\cup C}$, получаем:

$$I_{A\cup B\cup C} = I_A + I_B + I_C - I_{A\cap B} - I_{A\cap C} - I_{B\cap C} + I_{A\cap B\cap C}.$$

Перейдём в этом равенстве к математическим ожиданиям:

$$EI_{A\cup B\cup C} = EI_A + EI_B + EI_C - EI_{A\cap B} - EI_{A\cap C} - EI_{B\cap C} + EI_{A\cap B\cap C}.$$

Осталось вспомнить, что ожидание индикатора события равно вероятности этого события:

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A\cap B) - \mathrm{P}(A\cap C) - \\ - \mathrm{P}(B\cap C) + \mathrm{P}(A\cap B\cap C).$$

2. Если случайную величину можно представить в виде суммы индикаторов нескольких событий, то её ***математическое ожидание*** можно найти с помощью математических ожиданий индикаторов (см. занятия 16—22, где этот метод широко применяется).

Пусть в опыте возможны события A_k (конечное или бесконечное число) с вероятностями $p_k = \mathrm{P}(A_k)$. Тогда для индикаторов I_k этих событий $\mathrm{E}I_k = p_k$. Пусть некоторая случайная величина X равна сумме этих индикаторов: $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_k$ (сумма может быть бесконечной). Тогда

$$\mathrm{E}X = p_1 + p_2 + \ldots + p_k. \tag{1}$$

3. ***Дисперсию*** величины X тоже можно найти похожим способом. Нужно сначала найти $\mathrm{E}X^2$:

$$X^2 = (I_1 + I_2 + \ldots + I_k)^2 = I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + 2(I_1I_2 + I_1I_3 + \ldots + I_{k-1}I_k).$$

Скобка справа содержит все возможные попарные произведения индикаторов. Заметим, что $I_k^2 = I_k$ для любого k. Поэтому

$$X^2 = I_1 + I_2 + \ldots + I_k + 2(I_1I_2 + I_1I_3 + \ldots + I_{k-1}I_k) = \\ = X + 2(I_1I_2 + I_1I_3 + \ldots + I_{k-1}I_k).$$

Остаётся перейти к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X^2 = \mathrm{E}X + 2(E(I_1I_2) + E(I_1I_3)\ldots + E(I_{k-1}I_k)). \tag{2}$$

Всё складывается совсем хорошо, если события A_k попарно ***независимы***. Тогда любые два индикатора тоже независимы и поэтому $\mathrm{E}(I_jI_k) = \mathrm{E}I_j \cdot \mathrm{E}I_k = p_jp_k$ (см., например, задачу 20.1 или задачу 22.6). Если же независимости нет, то, чтобы воспользоваться формулой (2), сначала придётся найти все ожидания $\mathrm{E}(I_jI_k) = \mathrm{P}(A_j \cap A_k)$.

Формулы (1) и (2) дают метод индикаторов для вычисления математического ожидания и дисперсии. Этими формулами метод не ограничивается. Его можно использовать в различных модификациях см., например, решение задачи 20.1 б) на с. 96 или решение задачи 22.4 на с. 101).

Метод моментов — метод статистической оценки параметров распределения или каких-либо других параметров, в котором наблюдаемое среднее значение случайной величины приравнивается к её математическому ожиданию, дисперсия наблюдений — к дисперсии случайной величины и т. п. Простейшее применение метода моментов — неизвестную вероятность события оценивать его частотой.

Монета (***математическая, симметричная***) в теории вероятностей — это генератор двух равновероятных несовместных событий. В России, следуя давней традиции, эти события называют орёл и решка. Вероятность каждого 0,5. Металлическая монета служит физической моделью математической монеты. Металлическая монета может закатиться под шкаф или даже встать на ребро. Математическая монета ничего такого не может: либо орёл, либо решка.

Независимые случайные величины. Проводится эксперимент, в котором наблюдаются две случайные величины X и Y. Если никакое значение одной из величин не влияет на вероятности значений другой, то такие величины называют независимыми.

Независимость случайных величин можно определить или хотя бы пояснить с помощью независимых событий. Например: две случайные величины независимы, если события, связанные со значением одной из них, и события, связанные со значениями другой, независимы.

Однако в большинстве случаев независимость (или зависимость) случайных величин определяется тем, как устроен эксперимент. Например, при бросании двух игральных костей два выпавших числа независимы (потому что кости бросаются независимо друг от друга). А вот сумма выпавших очков и число очков на первой кости уже не являются независимыми, ведь если на первой кости выпало 5 очков, то сумма уже не может быть меньше 6 или больше 11.

Независимые события. События A и B независимы, если наступление одного из них не влияет на вероятность другого. Иными словами, условная вероятность одного события при условии, что случилось второе, равна вероятности первого без этого условия:

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B).$$

Если вероятности $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(B)$ ненулевые, то эти два равенства выполняются одновременно (докажите), поэтому можно говорить о взаимной независимости двух событий.

Для независимых событий

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Иногда это равенство принимают за определение. Чтобы убедиться в том, что два события независимы, достаточно проверить хотя бы одно из трёх этих равенств.

Для трёх или более событий независимость определяется похожим образом: наступление любого количества событий в любых комбинациях не влияет на вероятности остальных событий.

Например, если любые два из трёх событий A, B и C независимы и ещё выполняется равенство

$$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(C),$$

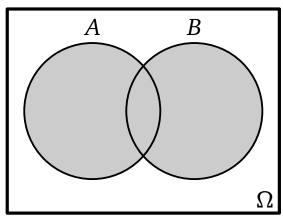
то независимы в совокупности все три события A, B и C.

Неподвижная точка в перестановке — элемент вида $\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$, т. е. элемент, для которого $s(a)=a$.

Несовместные события — события, пересечение которых пусто. Несовместные события не имеют общих элементарных исходов. Если события несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей (формула сложения для несовместных событий):

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B).$$

Объединением событий A и B называется событие, которое происходит, когда наступило хотя бы одно из событий A и B. Удобно показать объединение двух событий на диаграмме Эйлера (см. рис.). Аналогично определяется объединение трёх или более событий.



Основание натурального логарифма $e=2{,}718281828459\ldots$ — иррациональное число. Его называют ещё числом Эйлера. Пишут кратко $\ln x$ вместо $\log_e x$. Среди прочих логарифмов натуральный выделяется тем, что график функции $y=\ln x$ пересекает ось абсцисс под углом 45° в точке $(1;0)$. Стало быть, и график показательной функции $y=e^x$ пересекает под углом 45° ось ординат в точке $(0;1)$. Известно множество последовательностей, сходящихся к e. Чаще всего используются следующие факты:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$ или, в более простой записи,

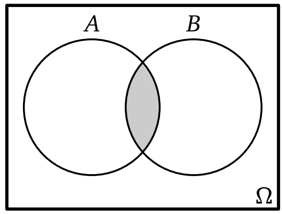
$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e;$$

это следует из разложения функции $y=e^x$ в ***степенной ряд***;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$

Параметры распределения — величины, от которых зависит распределение вероятностей. Часто по ошибке к параметрам причисляют и значения самой случайной величины. Делать этого не нужно.

Например, ***биномиальное распределение*** зависит от числа испытаний n и вероятности успеха p в каждом отдельном испытании. ***Геометрическое распределение*** зависит от одного параметра p. ***Гипергеометрическое распределение*** имеет три параметра: общее число объектов в совокупности N, число объектов первого типа K и количество извлечённых объектов n.



Пересечением событий A и B называется событие, которое происходит, когда наступают оба события A и B. Диаграмма Эйлера для пересечения изображена на рисунке. Аналогично определяется пересечение трёх или более событий.

Перестановкой порядка n называется таблица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ s(a_1) & s(a_2) & \dots & s(a_n) \end{pmatrix},$$

где $s(a_k)$ — это те же элементы a_k первой строки, взятые в каком-то порядке. Чаще всего говорят о перестановках чисел. Например $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — одна из шести перестановок чисел 1, 2 и 3.

Случайная перестановка — это перестановка, где элементы второй строки берутся в случайном порядке.

Последовательность Фибоначчи — числовая последовательность, которая начинается с двух единиц. Каждое последующее число получено сложением двух предыдущих:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \dots$$

Названа по имени итальянского математика Фибоначчи (Леонарда Пизанского), который, по-видимому, первым исследовал её свойства, главное из которых — отношение последующего члена к предыдущему постепенно приближается к «золотому сечению» $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Правило умножения вероятностей. Если имеются два события A и B, то вероятность их пересечения можно найти умножением:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A).$$

Это напрямую следует из формулы условной вероятности. Смысл простой — сначала наступает A, затем B при условии A. На самом деле слово «сначала» — лишь условность; чаще всего мы сами мысленно разбиваем эксперимент во времени, поскольку нам так удобно мыслить.

Если событий больше, скажем, три, то смысл прежний:

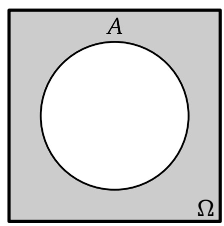
$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(C|A \cap B) \quad \text{и так далее.}$$

Правило умножения легко видеть и удобно применять, умножая вероятности событий вдоль цепочек в ***дереве вероятностей***.

Правильная кость (***честная, симметричная, игральная***)**.** В теории вероятностей правильная кость — генератор шести равновероятных несовместных событий. Обычно[1], когда говорят о кости и о бросании кости, представляют себе игральный кубик, на шести гранях которого нанесены точками или цифрами числа от 1 до 6.

Традиционно игральные кубики делают так, чтобы было невозможно нарушить равновероятность выпавших граней умелым броском. Поэтому сумма очков на противоположных гранях у правильного игрального кубика равна 7. Напротив единицы — шестёрка, напротив двойки — пятёрка, напротив тройки — четвёрка.

Противоположное событие. Пусть в эксперименте существует событие A. Если оно не случилось, то случилось противоположное событие $\overline{A}$. Строго говоря, событию $\overline{A}$ благоприятствуют те и только те элементарные исходы эксперимента, которые не благоприятствуют событию A. Диаграмма для противоположного события изображена на рисунке.



Распределение вероятностей случайной величины — заданное каким-либо образом соответствие между значениями случайной величины и вероятностями этих значений. Иногда распределение можно задать таблицей, иногда — формулой. Для описания распределений непрерывных случайных величин обычно используют специальные функции распределений и функции плотности вероятности.

[1] Обычно, но не всегда. Например, в задаче 7.4 правильная кость имеет четыре грани — она тетраэдральная, а не кубическая.

Если случайная величина X дискретна, то часто распределение вероятностей можно записать двумя строками. В верхней строке — значения, в нижней — их вероятности. Например, так:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

В этом примере случайная величина X принимает всего три значения 2, 3 и 4 с указанными вероятностями.

***Рекурсия* (*рекуррентная или рекурсивная последовательность*)** — процесс или последовательность, где последующие состояния или члены выражаются через предыдущие. Иногда можно дать рекуррентное решение задачи, когда невозможно или очень трудно найти решение с помощью явной формулы.

Пример: арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и с разностью d может быть задана рекуррентно: $a_n = a_{n-1} + d$.

Ещё один пример даёт ***последовательность Фибоначчи***: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $a_1 = a_2 = 1$.

Третий пример — рекуррентное соотношение для чисел сочетаний: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, при $C_n^0 = C_n^n = 1$ для любого n; это простейший случай ***свёртки Вандермонда***.

Свёртка Вандермонда — комбинаторное тождество

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

См. задачу 11.12.

Случайный выбор. Под случайным выбором подразумевается выбор без предпочтений. Если есть какой-то набор (совокупность) предметов, то при случайном выборе каждый предмет может быть выбран с равной вероятностью. Для бесконечных совокупностей труднее сказать, что такое случайный выбор, но иногда удаётся (см. определение ***геометрической вероятности***, например).

Стандартное отклонение случайной величины — арифметический квадратный корень из ***дисперсии случайной величины*** $\sqrt{\mathrm{D}X}$. Иногда обозначают SD (от Standard Deviation). Если дисперсия обозначена σ^2, то стандартное отклонение разумно обозначить σ.

Статистика — не только название науки. Статистика — общее название данных или результатов эксперимента. Например, наблюдаемые величины, их среднее арифметическое, медиана, наименьшее значение — разные статистики.

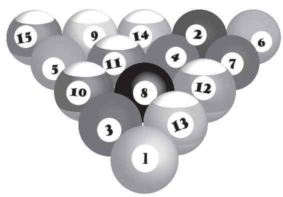
Степенной ряд функции $y=e^x$. Для любого x верно равенство

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.$$

Треугольник Паскаля. Числовая таблица, дающая ***числа сочетаний***.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	**6**	**4**	1			
5	1	5	10	**10**	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

На рисунке изображён треугольник Паскаля до строки 7. Например, $C_6^4=15$ — это число на пересечении шестой строки и четвёртого столбца (строки и столбцы в треугольнике нумеруются с нуля). Каждое число в треугольнике (кроме крайних единиц в строке) равно сумме двух чисел предыдущей строки, стоящих в том же столбце, что и предыдущем, поскольку $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$.



Треугольное число — число из последовательности 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Разница между соседними числами каждый раз увеличивается на 1. Эти числа образуют второй столбец ***треугольника Паскаля***: n-е треугольное число равно $\dfrac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2$. Название «треугольное число» пошло от того, что именно столько шариков можно «выстроить треугольником». Например, 15 шаров образуют треугольник перед началом игры в биллиард (см. рис.).

Условная вероятность события A при условии, что событие B наступило, равна

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Формула утверждает, что вероятность события A рассматривается по отношению к вероятности события B, которое теперь (поскольку случилось) представляет собой новый эксперимент. В частности, $\mathrm{P}(B|B)=1$.

Пример 1. При двукратном бросании монеты вероятность двух орлов ($O_1\cap O_2$), как мы знаем, равна 0,25. Но если первый орёл уже выпал (O_1), то вероятность двух орлов изменилась: она теперь равна вероятности выпадения одного орла (O_2), т. е. 0,5:

$$P(O_2|O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1)} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5.$$

Формула Байеса связывает условные вероятности двух событий: вероятность A при условии B и вероятность B при условии A.

$$\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A).$$

Справедливость этой формулы следует из того, что и правая, и левая часть дают $\mathrm{P}(A \cap B)$ (см. ***правило умножения***). Часто эту формулу записывают иначе:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Формула Бернулли (формула биномиальной вероятности) — формула, по которой вычисляется вероятность ровно k успехов в n одинаковых и независимых ***испытаниях Бернулли***:

$$\mathrm{P} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность успеха в каждом испытании, а $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

Формула сложения вероятностей (формула включений и исключений, формула Пуанкаре). Для двух событий формула имеет вид (см. задачу 3.9)

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Для трёх событий:

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \\ - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C).$$

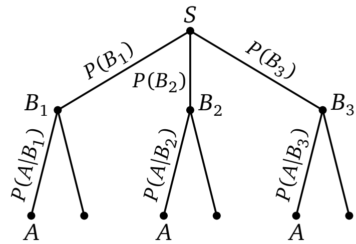
И так далее — можно написать формулу для любого числа событий. Из суммы вероятностей событий вычитается сумма вероятностей всевозможных попарных пересечений, затем прибавляется сумма вероятностей пересечений по три, затем вычитается сумма пересечений по четыре и т. д. Последнее слагаемое — вероятность пересечения всех событий, а знак зависит от того, сколько всего событий.

Для ***пересечения событий*** формула устроена так же: нужно все знаки $\cup$ и $\cap$ поменять местами. Например, для трёх событий получаем:

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A \cup C) - \\ - \mathrm{P}(B \cup C) + \mathrm{P}(A \cup B \cup C).$$

Доказать формулы можно разными способами. Удобно использовать ***метод индикаторов*** (см. с. 118).

Формула полной вероятности легче всего поясняется с помощью графа. Пусть в эксперименте наблюдается несколько несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, и событие A может рассматриваться отдельно при наступлении каждого из этих событий.



Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей цепочек SB_1A, SB_2A, ..., SB_nA в дереве эксперимента (на рисунке для $n=3$). Вероятность цепочки SB_kA равна $\mathrm{P}(B_k)\cdot\mathrm{P}(A|B_k)$. Обычно записывают в другом порядке: $P(A|B_k)\cdot P(B_k)$. Тогда

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B_1)\cdot\mathrm{P}(B_1)+\mathrm{P}(A|B_2)\cdot\mathrm{P}(B_2)+\ldots+\mathrm{P}(A|B_n)\cdot\mathrm{P}(B_n).$$

Это и есть формула полной вероятности.

Формула суммы геометрической прогрессии. Для конечной прогрессии из n членов с первым членом b и знаменателем q

$$b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1} = \frac{b(1-q^n)}{1-q}.$$

Для бесконечной прогрессии с первым членом b и знаменателем q $(-1<q<1)$:

$$b+bq+bq^2+\ldots = \frac{b}{1-q}.$$

Число сочетаний C_n^k — количество способов выбрать k предметов из множества, в котором n предметов. Например, нужно выбрать две буквы из букв А, Б и В. Существует три варианта: АБ, АВ и БВ. Поэтому $C_3^2=3$. Формула для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

где $n!$ — факториал числа n, т. е. произведение натуральных чисел от 1 до n. Факториал нуля определяется отдельно: $0!=1$.

Чтобы найти число сочетаний, можно воспользоваться специальной таблицей — ***треугольником Паскаля***.

Основное ***рекуррентное*** соотношение:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k \quad \text{при } C_n^0 = C_n^n = 1 \text{ для любого } n.$$

Целая часть числа — наибольшее целое число, не превосходящее данное число. Целая часть числа x обозначается $[x]$. Например, $[3{,}4]=3$, $[2]=2$, $[-3{,}45]=-4$.