



Профессиональная переподготовка ДПО ВШЭ
Курс «Элементы теории вероятностей»

Вопросы к зачету

1. Меры центральной тенденции. Медиана числового набора.
2. Теорема о средних.
3. Функция рассеивания. Примеры.
4. Дисперсия и стандартное отклонение числового набора. Формулы.

5. Элементарные события случайного эксперимента. Определение вероятности события.
6. Вероятность событий в опыте с равновозможными элементарными исходами.
7. Формула сложения вероятностей для двух и трех событий.
8. Условная вероятность события. Формула Байеса.
9. Независимые события.
10. Формула полной вероятности.
11. Задача о стрельбе до первого попадания.
12. Задача о выборе из конечной совокупности.
13. Испытания Бернулли. Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли.
14. Дискретная случайная величина. Распределение. Характеристики случайных величин.
15. Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания.
16. Дисперсия случайной величины. Свойства дисперсии.
17. Бинарная случайная величина
18. Геометрическое распределение. Математическое ожидание и дисперсия.
19. Биномиальное распределение. Математическое ожидание и дисперсия.
20. Гипергеометрическое распределение. Математическое ожидание.
21. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.
22. Теорема Бернулли. Закон больших чисел в форме Бернулли.

Задачи к зачету

Описательная статистика

1. Медиана набора $x_1; x_2; \dots; x_{99}$ равна m . Найдите медиану набора $x_1^3; x_2^3; \dots; x_{99}^3$.
2. Существует ли числовой набор, у которого медиана $m = 3$, среднее $\bar{x} = 5$ и стандартное отклонение $S = 1,6$?
3. Числовой набор $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ имеет среднее $\bar{x} = 4$ и дисперсию $S^2 = 1,5$. Найдите среднее и дисперсию числового набора $2X - 1$;
4. Числовой набор $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ имеет среднее $\bar{x} = 4$ и дисперсию $S^2 = 1,5$. Найдите среднее числового набора X^2 .
5. Найдите медиану числового набора 3; 3; -2; 4; 1; 0; 1; 4.
6. В числовом наборе 100 чисел. Если выкинуть одно число, то медиана оставшихся чисел станет 52. Если выкинуть другое число, то медиана оставшихся чисел станет 38. Найдите медиану всего набора.
7. Найдите дисперсию набора 1; 3; 5; -2; 4; 1; 0; 4.

8. Числовой набор $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ имеет среднее \bar{x} и медиану m . Сравните

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \bar{x}| \quad \text{и} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - m|.$$

9. Числовой набор $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ имеет среднее \bar{x} и медиану m . Сравните

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2.$$

10. Известно, что цены на молоко на рынке в течение года менялись, но в среднем за год 1 л молока стоил ровно 60 рублей. Две хозяйки покупали на этом рынке молоко в течение года. Первая каждый день покупала ровно 1 л молока, а вторая каждый день покупала молока ровно на 60 рублей. Какая из хозяек купила молока больше?

11. Банк АБВ предлагает срочные годовые вклады. Из-за изменчивой ситуации на рынке процентная ставка ежегодно меняется. Процентные ставки за десять лет составляли k_1, k_2, \dots, k_{10} %. Найдите среднюю годовую процентную ставку за этот период.

12. n предприятий производят одинаковую продукцию. На производство единицы продукции предприятие k тратит t_k часов. Найдите среднее время производства единицы продукции.

Теория вероятностей

13. Симметричную монету бросают 3 раза. Найдите вероятность события «Орел выпал два раза из трех».

14. Симметричную монету бросают n раз. Найдите вероятность события «Орел выпал ровно один раз».

15. Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность события «Наибольшее из выпавших значений равно 5».

16. Бросают две игральных кости. Вычислите вероятность события «Сумма очков на обеих костях равна 11».

17. Бросают две игральных кости. Вычислите вероятность события: «Числа очков на костях различаются не больше, чем на 2».

18. В Энске 20 улиц. Три из них идут параллельно друг другу с севера на юг, а остальные проходят параллельно друг другу с запада на восток. Любые две улицы разных направлений пересекаются, образуя перекресток. Утром два постовых случайным образом встали на два разных перекрестка. Найдите вероятность того, что они стоят на одной улице.

19. Одно время на улицах и вокзалах профессиональные игроки предлагали прохожим испытать удачу в простой игре. Зажав в кулаке обычный носовой платок так, что наружу высывались только четыре уголка, игрок просил прохожего взять два любые конца и потянуть за них. Если прохожий вытаскивал два соседних угла, то он проигрывал. Если прохожий вытаскивал два противоположных угла, то он выигрывал. Найдите вероятность выигрыша прохожего.

20. На день рождения к Паше пришли две Маши, две Даши и два Саши. Все семеро расселись за круглым столом. Найдите вероятность того, что Паша сидит между двумя тезками.

21. Дан правильный выпуклый n – угольник, и в нем случайным образом выбраны две диагонали. Найдите вероятность того, что они пересекаются внутри n -угольника.

22. Город считается миллионером, если в нем более миллиона жителей. Вероятность какого события больше: $A = \{\text{наугад выбранный горожанин живет в городе-миллионере}\}$ или $B = \{\text{наугад выбранный город – миллионер}\}$?

23. В торговом центре рядом стоят две вендинговые машины, торгующие кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в каждой одной из машин, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обеих, равна 0,14. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обеих машинах.

24. Сова утверждает, что в среднем три шнурка из четырёх, которые можно найти в лесу, ей не нужны, поскольку они слишком длинные для дверного звонка. Иа утверждает, что в среднем четыре из пяти шнурков из леса ему не нужны, поскольку они слишком короткие, чтобы сделать из них хвост для ослика. Оба правы. Какова вероятность того, что случайно найденный в лесу шнурок не нужен ни Сове, ни Иа?

25. Есть три монеты. Одна обычная, у второй обе стороны – орлы, а у третьей обе стороны – решки. Выбрали случайную монету и бросили ее. Выпал орёл. Какова вероятность того, что на другой стороне этой монеты тоже орёл?

26. Трое друзей, не зная друг о друге, садятся в один и тот же поезд метро, в котором пять вагонов. Каждый из них выбирает вагон случайным образом. Найдите вероятность того, что двое из них случайно окажутся в одном вагоне, а третий – в другом вагоне.

27. При двух бросаниях игральной кости сумма выпавших очков оказалась равна 8. Найдите вероятность того, что при первом бросании выпало 5.

28. При последовательных бросаниях кости в какой-то момент сумма очков стала равна 4. Найдите вероятность того, что было сделано 2 броска.

29. На столе 10 револьверов, из них один непристрелянный. Джон попадает с 20 шагов в 1-центовую монету с вероятностью 0,73, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если же Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то попадает в монету с вероятностью 0,23. Джон взял первый попавшийся револьвер, выстрелил в монету и... промахнулся. Какова вероятность того, что Джон стрелял из непристрелянного револьвера?

30. Из трех городов на симпозиум приехали физики и математики.

Из г. Числоводска – 5 физиков и 8 математиков.

Из г. Пятибурга – 7 физиков и 6 математиков.

Из г. Плюсинска – 12 физиков и 13 математиков.

Три случайно выбранных представителя по одному от каждого города разыграли право открыть симпозиум с помощью честного жребия. Найдите вероятность того, что симпозиум откроет математик.

31. Два события имеют положительные вероятности и несовместны. Могут ли эти события быть независимыми?

32. Ракетный катер стреляет по квадрату, в котором находятся две малые цели, расположенные далеко друг от друга. В каждую цель ракета попадает с вероятностью $p < 0,5$. Всего катер произвел пять выстрелов. Найдите вероятность того, что обе цели поражены хотя бы по разу.

33. При появлении симптомов одного редкого заболевания пациента направляют на исследование крови. Известно, что анализ оказывается ложноотрицательным (не выявляет имеющееся заболевание) в 2% случаев. Всего отрицательных анализов 94%, а подтверждается диагноз в конечном итоге у 3% пациентов, направленных на исследование. Найдите вероятность того, что анализ окажется ошибочно положительным?

34. Миша бросает мяч в баскетбольную корзину. Вероятность попадания равна $p = 1/3$. Найдите вероятность того, что сделав 5 бросков, Миша попадет в корзину только при втором и четвертом броске.

35. Из отрезка $[0; 2]$ наудачу выбирают 4 точки. Найдите вероятность того, что только первая и третья точки удовлетворяют условию $x < 0,5$.

36. Известно, что события A и B независимы, события A и C независимы и события B и C тоже независимы. Будут ли независимы три события A , B и C ? Если да докажите, если нет – приведите пример.

37. Событие «в огороде бузина» наступает с вероятностью 0,4. Событие «приезд дядьки в Киев» имеет вероятность 0,6, при этом одновременно эти события наблюдались в 34% процентах случаев. Являются ли эти события независимыми?

38. Известно, что 40% приверженцев некоторой политической партии — женщины. 70% приверженцев этой партии — городские жители. При этом 60% горожан, поддерживающих партию, — мужчины. Являются ли независимыми события «Приверженец партии — горожанин» и «Приверженец партии — женщина»?

39. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найдите вероятность того, что потребуется пять бросков.

40. Сергей бросает мяч в баскетбольную корзину до первого попадания. Какое событие более вероятно: «Сергей попадет с четвертой попытки», «Сергей попадет с пятой попытки» или «Сергей попадет с девятой попытки»?

41. Двое играют в кости. У них есть одна игральная кость, и они бросают её по очереди до тех пор, пока у кого-нибудь не выпадет шестёрка. У кого выпала – тот и выиграл. Найдите вероятность того, что выиграет тот, кто бросает вторым.

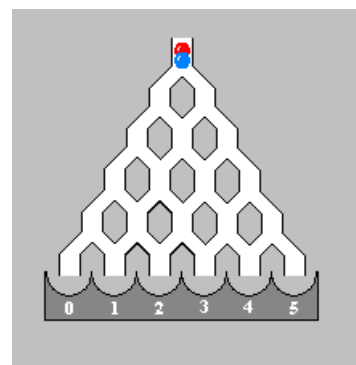
42. Миша бросает мяч в баскетбольную корзину. Вероятность попадания равна $p = 1/3$. Найдите вероятность того, что сделав 5 бросков, Миша попадет в корзину ровно два раза.

43. Игральную кость бросают 6 раз. Найдите вероятность того, что шестерка выпадет более двух раз.

44. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p . На каждую мишень стрелку дается две попытки (если с двух попыток мишень не поражена, стрелок переходит к следующей мишени). Найдите вероятность того, что будут поражены ровно две мишени из пяти;

45. Чтобы быстрее давать сдачу, кассир заранее собирает столбики из рублевых монет по 10 монет в каждом. Найдите вероятность того, что в двух разных столбиках одинаковое число монет лежит орлом вверх.

46. По доске Гальтона вниз из верхней точки падают два шарика (см.рисунок). Найдите вероятность того, что они оба упадут в одну и ту же ячейку.



47. В классе, в котором 14 девочек и 16 мальчиков честным жребием разыгрываются 8 билетов на новогоднюю елку. Найдите вероятность того, что билеты выиграют 4 девочки и 4 мальчика.

48. В компании 100 сотрудников. Руководство проводит два опроса по двум разным темам: «Кто виноват?» и «Что делать?». Для участия в первом опросе выбрано 20 случайных сотрудников. Для участия во втором опросе случайно выбрано 30 человек. Какова вероятность того, что ровно 10 сотрудников оказались в обеих выборках?

49. Найдите неизвестную вероятность в распределении

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,21 & 0,1 & 0,49 & 0,15 & x \end{pmatrix}.$$

50. Найдите математическое ожидание и дисперсию бинарной величины

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

51. Бинарная величина задана распределением

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

При каком p достигается и чему равно наибольшее значение дисперсии DI ?

52. Найдите математическое ожидание случайной величины ξ :

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

53. Известны распределения вероятностей двух независимых случайных величин:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ и } Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Составьте таблицу распределения случайной величины $Z = Y + X$.

54. Известны распределения вероятностей двух независимых случайных величин:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ и } Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание случайной величины $W = XY$.

55. Найдите дисперсию случайной величины

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

56. Известно, что $E\xi = 5$, $D\xi = 2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $3\xi - 2$.

57. Найдите математическое ожидание суммы очков при пятикратном бросании правильной игральной кости.
58. Найдите дисперсию суммы очков при 12 бросаниях правильной игральной кости.
59. Найдите математическое ожидание произведения очков при двукратном бросании игральной кости.
60. Системный администратор обслуживает два сервера, работающих независимо. Вероятность того, что в течение дня первый и второй серверы потребуют вмешательства, равны 0,6 и 0,5 соответственно. Найдите математическое ожидание числа серверов, которые потребуют вмешательства.
61. Каково математическое ожидание числа бросков монеты к моменту, когда выпадет решка, следующая за орлом?
62. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p . На каждую мишень стрелку дается не более двух попыток. Найдите математическое ожидание числа пораженных мишеней. Найдите математическое ожидание числа пораженных мишеней.
63. При выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Ему разрешается стрелять до трех промахов. Найдите ожидаемое число израсходованных патронов?
64. У вахтера на доске висели ключи от аудиторий. Каждый ключ на своем крючке. Однажды вахтер рассыпал все ключи, собрал их и в спешке развесил на крючки как попало. Найдите математическое ожидание числа ключей, которые оказались на своих крючках. Найдите дисперсию этой величины.
65. По дороге друг за другом едут 100 автомобилей. Дорога узкая, поэтому обгоны запрещены. У каждого автомобиля своя скорость, поэтому они сбиваются в группы. Найдите математическое ожидание числа групп.

66. Случайная величина ξ распределена на всей числовой прямой и имеет дисперсию. Оцените сверху вероятность того, что ξ отклоняется от своего математического ожидания больше чем на четыре стандартных отклонения.
67. Фирма, торгующая контактными линзами, заказала исследование и получила, что доля клиентов, пользующихся автоматами по продаже линз, с вероятностью 0,95 отличается от 0,34 не более, чем на 0,04. Сбор данных обошелся в 25000 рублей. Оцените примерную сумму стоимости сбора данных для такого же исследования, но с погрешностью 0,01.