ЗАОЧНЫЕ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И.Р.Высоцкий, О.М.Заплетина
Московский центр педагогического мастерства

В содержание курса школьной математики в соответствии с образовательным стандартом с 2004 года входят элементы теории вероятностей и статистики. С 2012 года задачи по вероятности и представлению данных входят в единый государственный экзамен по математике.

Вместе с тем известно, что одним из важнейших аспектов образования является популяризация знаний. Если по алгебре, геометрии и другим традиционным разделам школьной математики нет недостатка в дополнительной, научно-популярной и популярной литературе для взрослых и детей разных возрастов, то анализ состояния дел в области теории вероятностей показывает явный недостаток как популярной литературы, так и иных форм популяризационной работы [1,4].

Незначительное количество популярных изданий для школьников было выпущено в Советском Союзе преимущественно в 50-е — 80-е годы прошлого века (см., например, [8,9]). Число новых материалов можно считать исчезающее малым, даже с учетом переводных зарубежных изданий на тему вероятности и статистики для школьников (например, [12]). В то же время количество зарубежной популярной литературы по статистике и вероятности увеличивается. Частично это связано с ростом значимости вероятностно-статистической линии в школе, частично — с ростом роли стохастических методов в разных отраслях мирового хозяйства [1].

Популяризационная деятельность должна осуществляться в различных формах. Помимо литературы большую ценность имеют кружки, олимпиады и другие интеллектуальные соревнования для детей и взрослых самых разных уровней. В последние годы мы наблюдаем стихийный рост количества и качества интернет-сайтов, посвященных популярной математике, в частности, в области теории вероятностей и статистики.

На сайте http://www.mccme.ru/ с 2008 года проходит ставшая уже почти традиционной ежегодная заочная интернет-олимпиада по теории вероятностей для школьников. Статьи, посвященные этой олимпиаде, публиковались в журнале «Математика» [3,5].

Впервые олимпиада была проведена по инициативе Юрия Николаевича Тюрина, Алексея Алексеевича Макарова и Ивана Валериевича Ященко. В отборе и составлении задач в разные годы участовали многие математики и педагоги: Ю.Н.Тюрин, Е.А.Бунимович, В.А.Булычев, П.В.Семенов, А.А.Макаров, И.В.Ященко и др. Последние несколько лет олимпиада проводилась в основном силами сотрудников МЦНМО и научно-методической лаборатории теории вероятностей МИОО.

Правила самой олимпиады крайне просты; невысоки и требования к участникам. Олимпиада открыта для всех желающих и проходит в течение календарного месяца, обычно с 20 марта по 20 апреля. Каждый желающий должен заявить письменно (адрес teorver.olympiads@gmail.com) или через форму регистрации на сайте http://olimpiada.ru/ о своем желании участвовать. Это можно сделать заранее или перед окончанием олимпиады, прислав заявку вместе с решениями.

Задачи олимпиады рассчитаны на школьников 6 — 11 классов. Устоялась традиция, когда оргкомитет не ограничивает «возраст задачи» сверху. Любую задачу мы лишь рекомендуем учащимся, начиная с некоторого класса. Например, задача, которая может быть решена с использованием только интуитивных представлений или конечного перебора, классического определения вероятностей и т.п., рекомендуется учащимся, начиная с 6 класса. Если при решении имеется необходимость использовать несложные преобразования в рамках алгебры событий, задача рекомендуется учащимся 7 класса и старше. Если в задаче участвуют характеристики случайных величин, то такую задачу мы предлагаем школьникам с 8 класса и т.п. При этом, если одиннадцатиклассник успешно решил задачу для 6 или 7 класса, он получает за нее полный балл, так же как и шестиклассник.

Возрастная дифференциация возникает на этапе проверки и награждения победителей. Отдельно выделяются победители (3 первых места) среди учащихся 6 — 7 классов, отдельно среди 8 — 9 классов и отдельно среди старшеклассников 10 — 11 классов.

За последние несколько лет мы с удовольствием наблюдаем значительный прогресс многих наших постоянных участников. Особенной активностью отличаются школьники 7 — 9 классов. Удивительно, но за годы проведения олимпиады в ней участвовало несколько десятков учащихся старших классов, но никто из них не показал интересных результатов. Вероятно, это связано с тем, что олимпиада не имеет официального статуса и не предоставляет победителям и призерам льгот при поступлении в вузы.

Задания олимпиады выкладываются в свободном доступе на сайте (для того, чтобы войти на сайт и увидеть задания, регистрация не нужна) и объявляется дата, до которой оргкомитет принимает решения от участников. Согласно правилам олимпиады участники могут пользоваться любой помощью, справочной литературой и т.п. Неспортивным и некрасивым считается лишь откровенное «использование взрослого труда» и выдавание его за свою работу. До сих пор при проверке работ у нас ни разу не возникало сомнений в самостоятельности работы школьника.

Свои решения участник может присылать в любом формате от текстового файла до фотографий тетрадных страниц. Можно пользоваться обычной почтой. Единственное требование — работа должна быть читаемой. Разумеется, такая свобода выбора предоставляется участникам потому, что число их сравнительно невелико. Каждый год в олимпиаде регистрируется около 100 участников, а работ оргкомитет получает от 30 до 70. Оргкомитет работает над популяризацией олимпиады, стараясь привлечь больше участников, но при этом мы понимаем, что бóльшее число участников потребует значительно более строгих регламентов и привлечения значительных сил к проверке работ.

Материалы прошлых лет публикуются на сайте в разделе «Архив», Кроме того, олимпиады 2008-2011 года опубликованы отдельной книгой [10].

Задания-эссе

Отличительная особенность данной олимпиады состоит в том, что помимо собственно олимпиадных задач, подразумевающих решение, с 2010 года олимпиада включает 3 задания-эссе. От участников требуется проанализировать предложенную ситуацию и написать короткое «сочинение на заданную статистическую тему».

Участник олимпиады погружается в неопределенную ситуацию, где от него требуется фантазия, оценочная деятельность, учитывающая реальные ограничения и природу данных. Действия в неопределенной ситуации играют крайне важную роль в формировании общей статистической и математической культуры учащихся, поскольку вместо выполнения шагов известного или изученного алгоритма участник олимпиады оказывается в роли исследователя, самостоятельно планирующего эксперимент. Он самостоятельно определяет существенные и малосущественные особенности случайного эксперимента, самостоятельно интерпретирует полученные результаты, изобретает метод описания полученных данных и формирования гипотезы.

Сразу скажем, что ни в одном из предложенных эссе мы не предлагаем школьникам проверять сформулированные гипотезы, поскольку для этого математический аппарат, доступный школьнику, явно недостаточен.

В некоторых ситуациях выдвижение гипотезы само по себе является крайне непростым действием, требующим от учащегося высокой культуры регулятивной деятельности. Кроме того, возникают ситуации, когда количество возможных правдоподобных гипотез, связанных с описанной в задании ситуации, велико. В этих случаях авторы составляют задания таким образом, чтобы либо явно сформулировать гипотезу, либо косвенным образом направить действия учащегося (см. примеры заданий-эссе ниже).

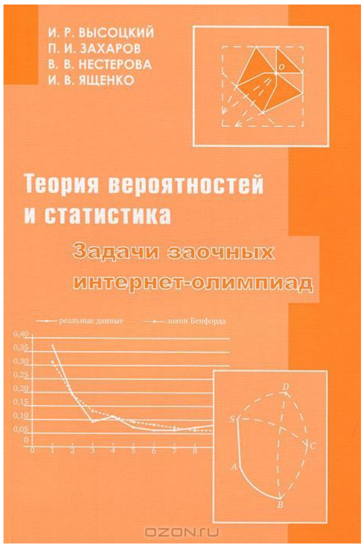
Важнейшей частью выполнения заданий эссе является поиск информации и данных, необходимых либо для поиска закономерности, либо для проверки данных на соответствие определенному предположению (гипотезе). Некоторые задания требуют от учащихся самостоятельного сбора данных с помощью опросов и коротких социологических исследований Таковы, например, задания о проблеме профессора Хаги, о выборе числа из числового отрезка. Другие задания предполагают самостоятельный поиск данных в интернете. Таковы задания о связи влажности воздуха и интенсивности снегопада, о законе Бенфорда (тексты заданий и комментарии к ним см. ниже).

Некоторые задания-эссе предназначены для выработки критического научного мышления учащихся. Учащийся погружается в ситуацию, когда известно, что в приведенных рассуждениях имеется какого-либо рода неточность, ошибка или необоснованный вывод. Учащимся предлагается понять, в чем недостатки проведенного исследования и сделать самостоятельные исследовательские шаги. Надо сказать, что задания такого типа оказались наиболее привлекательными для участников олимпиады.

Эта часть олимпиады традиционно вызывает повышенный интерес среди участников и пользуется популярностью. Среди присланных эссе есть очень яркие, оригинальные работы, которые мы размещаем на сайте в разделе «Решения». Материалы четырёх первых олимпиад в издательстве МЦНМО изданы отдельной книгой, в которую вошли наиболее удачные работы школьников.

Ниже мы публикуем несколько заданий-эссе прошлых лет. Все эссе можно условно разделить на несколько типов.

1. **Проверка какого-либо утверждения** либо с помощью самостоятельно собранных данных, либо с помощью необработанных данных, предоставленных «в комплекте» с заданием. Как правило, в этом случае участнику олимпиады частично предлагается алгоритм действий (см. ниже эссе 1 и 2).
2. **Самостоятельное исследование**, связанное с опросом одноклассников, друзей, родителей и последующая обработка данных с выдвижением правдоподобной гипотезы или опровержением неправдопдобной (см. эссе 3 и 5). Здесь важно умение систематизировать полученные данные, представлять их наиболее подходящим способом и выдвигать гипотезы.
3. **Поиск статистического метода** для решения задачи (см. эссе 4). Выработка конструктивного мышления и навыков. Ничем не ограниченное пространство поиска оказывается очень привлекательным для школьников. Эссе про оценку численности толпы оказалось самым часто выбираемым среди участников всех возрастных групп. Более того, никто из учащихся не предложил метод, казавшийся авторам задачи наиболее естественным, зато было предложено множество оригинальных методов. Одна участница (7 класс), чувствуя, что придуманный ею способ, как и всякий другой, нуждается в оценке точности и не имея возможности провести такую оценку, нашла замечательный выход: проведя оценку численности людей на фотографии тремя различными методами, она убедилась в том, что все три оценки не очень далеки друг от друга и тем самым, вероятно, дают правдоподобные результаты. После этого участница усреднила полученные результаты, интуитивно чувствуя, что усредненная оценка, скорее всего, лучше, чем каждая отдельная. Здесь статистическая интуиция проявляется в бóльшей степени, чем в умении применять готовые рецепты из учебника.



Задания первых трех типов, как правило, нацелены на выработку регулятивных умений учащихся по самостоятельному планированию и проведению экспериментов, а также выработке методов интерпретации полученных данных.

4. **Поиск ошибки** в сложном и распространенном рассуждении, представленном в описании задания (см., например, эссе 6). При выполнении заданий этого типа вырабатывается критически-деструктивное мышление, являющейся составной частью мыслительной культуры. Говоря конкретно о выполнении эссе про связь влажности воздуха и количество выпавшего снега, отметим, что школьникам удалось заметить многие недостатки в рассуждениях автора утверждений, но главную проблему — непригодность линейной регрессии для описания модели – не отметил никто из участников. Это лишний раз говорит о том, базовые идеи статистики находятся на границе интуитивного и осознанного.

Заметим, что эссе оценивались отдельно от прочих задач, независимо от возраста участника.

Задания, предполагающие решение

Помимо заданий-эссе олимпиада традиционно включает 16-19 традиционных задач по комбинаторике, статистике и теории вероятностей.

Некоторые задачи — очень простые, допускающие решение простым перебором комбинаций или простым рассуждением (см. задачи 7 — 10 из примеров).

Задания посложнее требуют от учащихся помимо поиска собственно ключа к олимпиадной задаче умения выполнять операции над событиями и некоторых знаний свойств вероятностей (см. задачи 11 — 14).

Наконец, олимпиада традиционно включает в себя действительно сложные задания, которые под силу только тем, кто уделит раздумьям и попыткам достаточно много времени, будет изучать литературу, задачи предыдущих лет. Несколько примеров приведено ниже (см. задачи 15 — 18).

Авторы сознательно включают в олимпиаду задачи, решение которых требует сложных преобразований. Таких задач немного, но они должны быть в заочной олимпиаде, само участие в которой предполагает исследовательскую работу участника.

Со всеми заданиями олимпиады можно ознакомиться на сайте олимпиады http://terver.mccme.ru/. Кроме того, в 2011 году в издательстве МЦНМО вышла книжка, содержащая все задания олимпиад 2008 —2011 годов. Ожидается следующее, более полное издание.

В заключение выражаем убеждение, что пришло время включать вероятностные задачи в классические олимпиады и математические турниры, такие как Турнир Ломоносова, региональный тур всероссийской олимпиады школьников и др.

Примеры заданий олимпид разных лет

1. Закон Ньюкомба–Бенфорда. (Эссе, 2010, 9 – 11) В 1881 году Саймон Ньюкомб заметил интересную закономерность, получившую впоследствии название “закон Бенфорда” (в честь переоткрывателя Фрэнка Бенфорда). Закон гласит, что в любом большом массиве однородных числовых данных (площади стран, высоты гор, длины рек, курсы валют, значения физических величин и т.п.[1]) цифра 1 встречается на первом месте примерно в шесть раз чаще, чем цифра 9. Или, в общем случае, вероятность встретить на первом месте цифру k равна $\lg\frac{k+1}{k}$[2], где $k = 1, \ldots, 9$. Обсуждение закона можно найти в статье академика В.И.Арнольда «Антинаучная революция и математика» (http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=viarn_vatikan) или «Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира» (В.И.Арнольд. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М., МЦНМО, 2008). Напишите небольшое эссе на тему закона Бенфорда, в котором

а) проверьте, выполняется ли этот закон для населения субъектов Российской Федерации;

б) опишите любой другой набор однотипных величин, у которых на первом месте может стоять любая цифра, и проверьте согласованность этих данных с законом Бенфорда.

2. Прогноз погоды. (Эссе, 2010, 6 – 11) Считается, что лучший прогноз погоды на завтра «Завтра погода будет такая же, как сегодня». Метеорологи часто говорят, что точность этого прогноза около 80%, то есть вероятность того, что погода завтра будет похожа на сегодняшнюю равна примерно 0,8. Зайдите на сайт www.rp5.ru или используйте любой другой источник с архивом погоды за несколько месяцев. Выберите свой город и проверьте, насколько правы метеорологи, которые так говорят. Выполняя это задание, составьте таблицы погоды, учитывая температуру воздуха, облачность и направление ветра за месяц.

3. Проблема профессора Кадзуо Хаги. (Ессе, 2011, 7 – 11) Профессор Кадзуо Хага из университета Цукубы[3] изобретатель и энтузиаст оригамики — геометрического оригами. Однажды он поставил интересный вопрос.

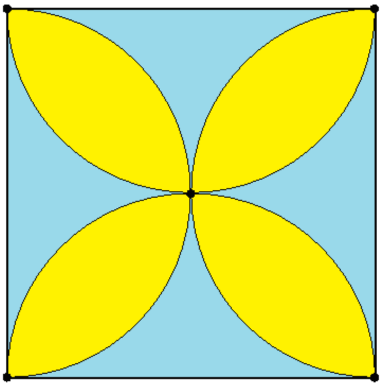


Рис. 1

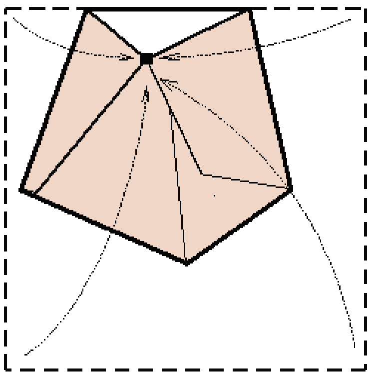


Рис. 2

На рис. 1 бумажный квадрат разделен на желтые и голубые области четырьмя полуокружностями. Получается изящный орнамент, напоминающий цветок.

[1] Важно, чтобы величины в наборе могли начинаться на любую цифру.

[2] $\lg x$ логарифм по основанию 10 (десятичный).

[3] Университетский город близ Токио

Если выбрать точку в какой-нибудь голубой области и затем последовательно сделать сгибы так, что каждая вершина квадрата наложится на эту точку, то в результате получится пятиугольник (рис. 2). Поэтому объединение голубых фигур профессор Хага назвал областью пятиугольников или просто 5-областью. Желтым цветом показана 6-область. Четыре вершины и центр квадрата — точки, приводящие к четырехугольникам.

Профессор Хага неоднократно рассказывал школьникам и учителям математики о распределении точек по числу вершин получающегося многоугольника. Он пишет следующее:

«*Я заметил, что, если попросить выбрать случайную точку, то намного больше людей отмечает точку, приводящую к шестиугольнику, чем к пятиугольнику. Очень редко встречаются те, кто выбирает точки, дающие четырехугольник. Возникает вопрос: пропорционально ли число людей, о которых идет речь, площадям областей?*

Чтобы ответить на этот вопрос, найдем площади областей. Пусть длина стороны квадрата равна 1. *Тогда радиус каждого полукруга равен* $0,5$, *а его площадь равна* $\frac{\pi}{8}$. *Значит, общая площадь четырех полукругов равна* $\frac{\pi}{2}$. *Таким образом, площадь лепестков, то есть площадь области шестиугольников равна* $\frac{\pi}{2}-1\approx 0,57$. *А площадь области пятиугольников равна* $1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2-\frac{\pi}{2}\approx 0,43$.

Оказывается, разница площадей не очень велика. Отношение числа людей, выбирающих точки, лежащие в соответствующих областях несоразмерно отношению площадей. Было бы интересно узнать причину, по которой точки вне лепестков обладают меньшей привлекательностью, чем точки внутри них».

Проведите эксперимент. Для этого Вам потребуется несколько десятков бумажных квадратов. Можно использовать белые чистые салфетки, разрезанные на квадраты без сгибов. Попросите как можно больше людей (своих друзей, а также взрослых) отметить произвольную точку на чистом бумажном квадрате. Если собрать все отмеченные точки на одном рисунке, то получится распределение точек. Может быть, свойства этого распределения помогут объяснить, почему любители шестиугольников встречаются гораздо чаще, чем мог бы ожидать профессор Хага, сравнивая площади областей?

4. Численность толпы. (Эссе, 2012, 6 – 9)

На фотографии — толпа людей. Как оценить (подсчитать приблизительно) число людей в этой толпе? Может быть, можно что-то придумать?

Попробуйте придумать подходящий метод, воспользоваться им и сделать оценку численности толпы на фотографии. Напишите подробно, что за метод вы придумали, почему он должен правильно работать, как им пользоваться и что у вас получается. С интересом ждем ваших результатов — сколько же людей на фото?

5. Выбор числа. (Эссе, 2012, 6 – 11) Психологи и другие специалисты утверждают, что человек не может сделать чисто случайный выбор из предложенных альтернатив. Например, известно, что если человеку предложить выбрать совершенно случайную цифру, то он, скорее всего, выберет цифру 7. Причины этого до конца неизвестны, хотя есть различные гипотезы.

Мы предлагаем Вам экспериментально проверить, правдоподобна ли гипотеза: «*значительное число людей чаще всего подсознательно выбирают числа, далекие от краев и от середины предложенного числового ряда, то есть делящее ряд чисел близко к отношению 1:3 или 3:1*».

6. Влажность воздуха и снег. (Эссе, 2013, 6 – 11) Одним февральским утром, отворачивая лицо от колючей метели, господин Ноибуро Кавасаки задался вопросом — а как связаны влажность воздуха и количество снега? Чтобы ответить на вопрос, он зашел на сайт метеостанции префектуры Ниигата и нашел данные о влажности нижних слоев воздуха (ниже 2000 м) и верхних слоев воздуха (10000 – 12000 м) за много дней наблюдений. Кроме того, Кавасаки-сенсэй присовокупил к этим данным информацию о толщине снежного покрова, выпавшего в этот день в месте наблюдения.

Влажность верхних слоев атмосферы (φ_B) и нижних слоев атмосферы (φ_H) измеряется в процентах, а толщина снежного покрова (H) в миллиметрах выпавшего снега.

Вот что получилось, когда г-н Кавасаки составил диаграммы рассеивания.

Диаграмма $\varphi_B - H$

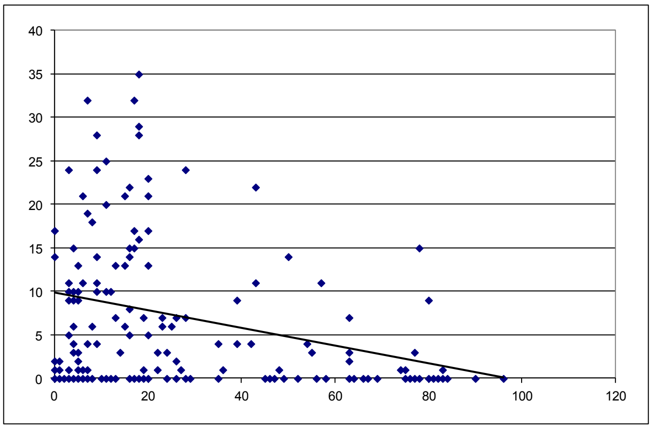
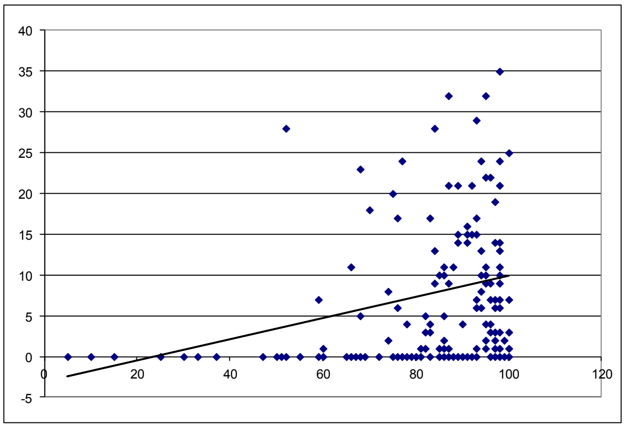


Диаграмма $\varphi_H - H$



Кавасаки-сенсэй рассчитал коэффициент корреляции Пирсона. Получилось $r_{\varphi_B,H} = -0,24$. После некоторых раздумий г-н Кавасаки написал: «Имеется отрицательная корреляция. Значение коэффициента корреляции приблизительно $-0,24$. Абсолютное значение не так велико, я думаю. Однако если верхние слои воздуха сухие, то выпадает много снега».

Затем точно так же г-н Кавасаки и его ученики построили диаграмму рассеивания для влажности нижних слоев воздуха и количества снега.

Коэффициент корреляции Пирсона оказался в этом случае равен $r_{\varphi_B,H} = 0,28$. Г-н Кавасаки так прокомментировал результат: «Аналогично, здесь имеется слабая положительная корреляция. Значение коэффициента корреляции приблизительно $0,28$. Полагаю, и это абсолютное значение не слишком велико. Однако если верхние слои воздуха влажные, то выпадает много снега».

Рассмотрите полученные диаграммы. Попробуйте найти соответствующие данные в архивах сайтов метеонаблюдений (accuwheather.com, rp5.ru и т.д.). Постройте свои диаграммы по наблюдениям данных величин. Разберитесь в том, что представляет собой коэффициент корреляции Пирсона и что он показывает. Подумайте, нет ли ошибок в действиях и рассуждениях господина Ноибуро Кавасаки. Напишите в коротком эссе, что Вы думаете по этому поводу. Вдруг у Вас появятся собственные мысли о том, как лучше интерпретировать полученные данные о влажности воздуха и снегообразовании.

Рассмотрите полученные диаграммы. Попробуйте найти соответствующие данные в архивах сайтов.

7. Записка. (2012, 6 – 11 классы)

Вася написал на листке бумаги записку, сложил ее вчетверо, надписал сверху «МАМЕ» (см. фото). Затем он развернул записку, дописал еще кое-что, опять сложил записку по линиям сгиба случайным образом (не обязательно, как раньше) и опять оставил на столе, положив случайной стороной вверх. Найдите вероятность того, что надпись «МАМЕ» по-прежнему сверху.

8. Аня ждёт автобус. (2012, 6 – 11 классы)

Какое событие из трёх указных - имеет наибольшую вероятность?

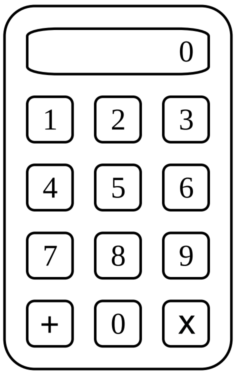
А = {Аня ждет автобуса не меньше минуты.}

Б = {Аня ждет автобуса не меньше двух минут.}

В = {Аня ждет автобуса не меньше пяти минут.}

9. Ряд из костей. (2012, 6 – 11 классы) 2012 правильных игральных костей (кубиков) составили в ряд таким образом, что каждые две соседние кости прилегают друг другу одинаковыми гранями (принцип домино). В остальном положение костей случайное. Найдите сумму очков, которые оказались на поверхности получившейся фигуры.

10. Калькулятор. (2010, 6 – 9 классы) На клавиатуре калькулятора есть цифры от 0 до 9 и знаки двух действий (см. рисунок). Вначале на дисплее написано число 0. Можно нажимать любые клавиши. Калькулятор выполняет действия в последовательности нажатий. Если знак действия нажать подряд несколько раз, то калькулятор запомнит только последнее нажатие. Кнопка со знаком умножения <×> сломалась и не работает. Рассеянный Учёный нажал несколько кнопок в случайной последовательности. Какой результат получившейся цепочки действий более вероятен — четное число или нечетное?



11. Вероятностное голосование. (2010, 6 – 9 классы) В финал конкурса спектаклей к 8 марта вышли два спектакля. В первом играли n учеников 5 класса А, а во втором — n учеников 5 класса Б. На спектакле присутствовали $2n$ мам всех $2n$ учеников. Лучший спектакль выбирается голосованием мам. Известно, что каждая мама с вероятностью $\frac{1}{2}$ голосует за лучший спектакль и с вероятностью $\frac{1}{2}$ — за спектакль, в котором участвует её ребенок.

а) Найдите вероятность того, что лучший спектакль победит с перевесом голосов.

б) Тот же вопрос, если в финал вышло больше двух классов.

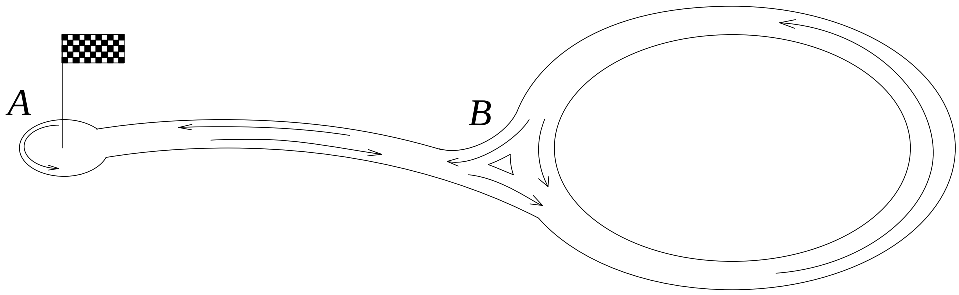
12. Почтальон. (2010, 7 – 11 классы) На улице n домов. Каждый день почтальон идёт на почту, берет там письма для жителей одного дома и разносит их. Затем он возвращается на почту, берет письма для жителей другого дома и снова их разносит. И так далее он обходит все дома. В каком месте нужно построить почту, чтобы почтальону пришлось проходить наименьшее расстояние? Улицу можно считать отрезком прямой.

а) Решите задачу для $n = 5$.

б) Решите задачу для $n = 6$.

в) Решите задачу для произвольного n.

13. Гонщик Юра. (2008, 8 – 11 классы) На рисунке изображена схема трассы для картинга. Старт и финиш в точке A, причем картингист по дороге может сколько угодно раз заезжать в точку A и возвращаться на круг.



На путь от A до B или обратно юный гонщик Юра тратит минуту. На путь по кольцу Юра также тратит минуту. По кольцу можно ездить только против часовой стрелки (стрелки показывают возможные направление движения). Юра не поворачивает назад на полпути и не останавливается. Длительность заезда 10 минут. Найдите число возможных различных маршрутов (последовательностей прохождения участков).

14. Оплата электричества. (2013, 7 – 11 классы) На рисунке показано платежное поручение на оплату электричества некоторой энергосбытовой компании.

Получатель платежа ОАО XXX

Код РР

Период: Март 2013 г.

Номер лицевого счета XXX

Ф.И.О.: XXX

Адрес: XXX

Код платежа	Тарифная зона	Показания счетчика		Расход факт.	Тариф (руб.)	Сумма к оплате (руб.)
		Текущее	Предыдущее			
13	*пик (Т1)*	1347	1270	77.0	**4,03**	310,31
2	*ночь (Т2)*	1402	1337	65.0	**1,01**	65,65
15	*п/пик (Т3)*	1298	1214	84.0	**3,39**	284,76

Подпись абонента: ***Итого к оплате:*** 6 6 0 *р.* 7 2 *к.*

Каждый месяц клиент передаёт компании показания трёхтарифного счётчика, установленного в квартире. Из показаний за текущий месяц вычитаются соответствующие показания за прошлый месяц, получается фактический расход за месяц по каждой из трёх тарифных зон (пик, ночь, полупик). Затем расход по каждой зоне умножается на цену одного киловатт-часа в этой зоне. Складывая полученные суммы, клиент получает общую сумму оплаты за месяц. В данном примере клиент заплатит 660 р.72 коп.

Компания ведет учёт расхода и оплаты электроэнергии, пользуясь данными, полученными от клиента. Проблема состоит в том, что компания иногда путает полученные шесть чисел, переставляя их произвольном порядке, правда, следит за тем, чтобы текущее показание оставалось больше, чем предыдущее. В результате расчёт компании может оказаться ошибочным. Если компания считает, что клиент должен больше, чем он заплатил, компания требует доплатить разность.

Пользуясь данными изображенной квитанции, найдите:

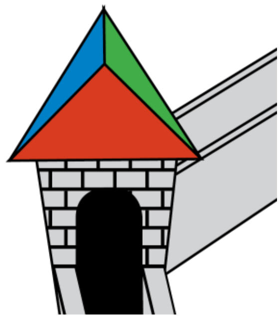
а) максимально возможную сумму доплаты за март 2013 года, которую компания потребует у клиента;

б) математическое ожидание разности между суммой, которую насчитает компания, и суммой, которую заплатил клиент.

15. Сумма очков. (2008, 9 – 11 классы) Игральную кость бросают раз за разом. Обозначим P_n вероятность того, что в какой-то момент сумма очков, выпавших при всех сделанных бросках, равна n. Докажите, что при $n \geq 7$ верно равенство

$$P_n = \frac{P_{n-1} + P_{n-2} + \ldots + P_{n-6}}{6}.$$

16. Очередь. (2009, 9 – 11 классы) В затылок друг другу выстроились n человек. Более высокие загораживают более низких, и тех не видно (если смотреть на очередь спереди). Чему равно математическое ожидание числа людей, которых видно?



17. Любимая пара. (2012, 10 – 11 классы) На сушке в случайном порядке (как достали из стиральной машины) висит n носков. Среди них — два любимых носка Рассеянного Учёного. Носки загорожены сохнущей простыней, поэтому Учёный их не видит, и достает по одному носку на ощупь. Найдите математическое ожидание числа носков, снятых Ученым к моменту, когда у него окажутся оба любимых носка.

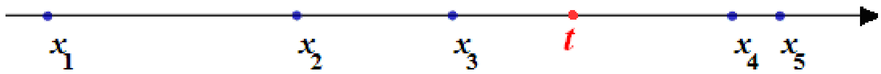
18. Трехскатная крыша. (2013, 10 – 11 классы)

Башня в замке короля Артура увенчана крышей в форме треугольной пирамиды, у которой все плоские углы при вершине — прямые. Три ската крыши покрашены в разные цвета. Красный скат крыши наклонен к горизонтали под углом α, а синий — под углом β. Найдите вероятность того, что дождевая капля, вертикально упавшая на крышу в случайном месте, упала на зеленый скат.

Решения некоторых задач

12. Почтальон. а) Введем координатную прямую, на которой расположим дома по улице Пушкина с координатами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ,упорядоченными по возрастанию.

Пусть t - координата почтового отделения на числовой прямой.

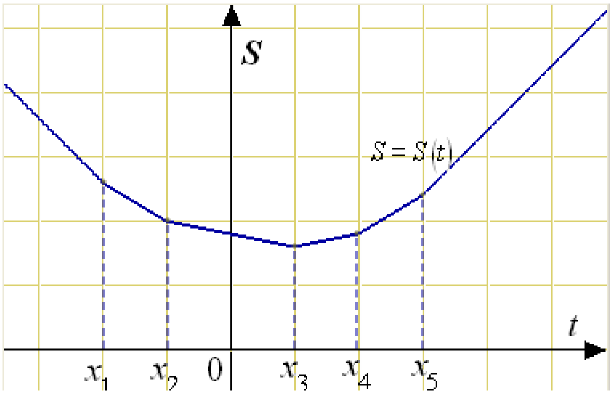


Почтальон проходит от почты до каждого дома дважды: туда и обратно, то есть общее расстояние, пройденное почтальоном, равно

$$2S = 2|x_1 - t| + 2|x_2 - t| + 2|x_3 - t| + 2|x_4 - t| + 2|x_5 - t|.$$

Нужно сделать $2S$, а значит и S, как можно меньше. Найдем S при разных t. Рассмотрим функцию $S = S(t)$. Графиком является ломаная, имеющая излом в каждой из точек $x_1, x_2, ..., x_5$.

У самого левого звена угловой коэффициент -5, а если двигать t вправо, то при переходе через каждую точку x_i угловой коэффициент увеличивается на 2. Таким образом, до точки x_3 функция $S = S(t)$ убывает, а после этой точки возрастает (на рисунке масштаб по оси ординат уменьшен для удобства).



Значит, наименьшее значение достигается в точке $t = x_3$. Здание почты нужно строить в этой точке.

б) Рассуждая так же, получим, что здание почты нужно строить в x_3 или x_4 или в любом месте между этими точками. Схему графика постройте самостоятельно.

в) Для произвольного n тем же рассуждением найдем, что t должно быть медианой набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. То есть при нечетных n положим $t = x_{\frac{n+1}{2}}$, а при четных n нужно взять $x_{\frac{n}{2}} \le t \le x_{\frac{n+2}{2}}$.

13. Гонщик Юра. Обозначим M_n число всевозможных маршрутов длительностью n минут. Каждый такой маршрут состоит ровно из n участков (участок — это отрезок *AB*, *BA* или кольцо *BB*). Пусть $M_{n,A}$ — число таких маршрутов, оканчивающихся в *A*, а $M_{n,B}$ — число маршрутов с конечной точкой *B*.

В точку *B* за минуту можно попасть как из точки *A*, так и из точки *B*, поэтому $M_{n,B} = M_{n-1}$.

В точку *A* за минуту можно попасть только из точки *B*, поэтому $M_{n,A} = M_{n-1,B} = M_{n-2}$.

Следовательно,

$$M_{n,A} = M_{n-2} = M_{n-2,A} + M_{n-2,B} = M_{n-2,A} + M_{n-3} = M_{n-2,A} + M_{n-1,A}$$

При этом следует полагать все M_j с отрицательным индексом, равными 0, $M_{0,A} = 1, M_{0,B} = 0$. Тогда справедливость выкладок сохраняется для $n < 3$.

Дополнительно заметим, что $M_{1,A} = 0, M_{2,A} = 1$. Таким образом, числа $M_{n,A}$ образуют последовательность Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

Число $M_{10,A}$ равно девятому числу Фибоначчи, то есть 34.

14. а) Очевидно (несложно показать), что сумма, которую потребует компания, будет наибольшей, если расход по самому высокому тарифу будет наибольшим возможным, по самому низкому тарифу — наименьшим. Наибольшая возможная сумма при этом 1058 р. 06 коп. Компания потребует доплатить

1058 р. 6 коп. – 660 р.72 коп. = 397 р. 34 коп.

б) Решим задачу в общем виде, считая, что клиент передал шесть различных чисел $a < b < c < d < e < f$. Рассмотрим одну из тарифных зон (например, пик, для определенности). Для этой зоны можно выбрать два любых числа из данных шести и поставить их в соответствующем порядке — по возрастанию. Это можно сделать $C_6^2 = 15$ способами. По условию все способы равновозможны. Поэтому математическое ожидание случайной величины X_1 «Расход по тарифу «Пик» есть среднее арифметическое пятнадцати чисел:

$$\begin{aligned}15\,\mathrm{E}\,X_1 = (f-e)+(f-d)+(f-c)+(f-b)+(f-a)+\\ +(e-d)+(e-c)+(e-b)+(e-a)+\\ +(d-c)+(d-b)+(d-a)+\\ +(c-b)+(c-a)+\\ +(b-a).\end{aligned}$$

Приведём подобные:

$$\mathrm{E}\,X_1 = \frac{5f+3e+d-c-3b-5a}{15}.$$

Очевидно, такое же ожидание имеют случайные величины X_2 и X_3 «Расход по тарифу «Ночь» и «Расход по тарифу «Полупик». Полная сумма оплаты S, рассчитанная компанией, равна

$$S = t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3,$$

где t_1, t_2 и t_3 — цены одного киловатт-часа по соответствующим тарифам. Следовательно,

$$\mathrm{E}\,S = t_1\cdot\mathrm{E}\,X_1 + t_2\cdot\mathrm{E}\,X_2 + t_3\cdot\mathrm{E}\,X_3 = \frac{5f+3e+d-c-3b-5a}{15}\cdot(t_1+t_2+t_3),$$

Определим значения переменных в соответствии с данными задачи:

$$f=1402;\ e=1347;\ d=1337;\ c=1298;\ b=1270;\ a=1214;$$
$$t_1+t_2+t_3 = 4{,}03+1{,}01+3{,}39 = 8{,}43.$$

Получаем:

$$\mathrm{E}\,S = \frac{5\cdot1402+3\cdot1347+1337-1298-3\cdot1270-5\cdot1214}{15}\cdot 8{,}43 = \frac{1210}{15}\cdot 8{,}43 = 680{,}02.$$

Математическое ожидание разности между суммой, которую потребует сбытовая компания, и суммой, которую заплатит клиент, равно

$$\mathrm{E}\,S - 660{,}72 = 680{,}02 - 660{,}72 = 19{,}03\ \text{(руб.)}$$

Ответ: а) 397 руб. 34 коп.; **б)** 19руб. 3 коп.

15. Разделим игру на два независимых испытания: первый бросок, который даёт с вероятностью $\frac{1}{6}$ любое число очков k от 1 до 6 и второе испытание – все последующие броски. Все последующие броски – такая же игра, которая даёт в какой-то момент сумму m с вероятностью P_m.

Очевидно, во всей игре сумма очков в какой-то момент станет равна n, если $m = n-k$. Рассмотрим события

$$A_{k,n-k} = \{\textit{первый бросок дал } k \textit{ очков, последующие привели в какой-то момент к сумме } n-k\}.$$

Поскольку последующие броски не зависят от первого,

$$P(A_{k,n-k}) = \frac{1}{6} P_{n-k}.$$

События $A_{1,n-1}$, $A_{2,n-2}$, $A_{3,\,n-3}$, $\ldots$ и т.д. несовместны, поэтому

$$P_n = P(A_{1,n-1} \cup A_{2,n-2} \cup \cdots \cup A_{6,n-6}) = \frac{1}{6} P_{n-1} + \frac{1}{6} P_{n-2} + \cdots + \frac{1}{6} P_{n-6},$$

что и требовалось доказать.

16. Обозначим X_n случайную величину «Число видимых среди n человек». Допустим, мы вычислили $\mathrm{E}\, X_{n-1}$. Что произойдет при добавлении n-го человека в хвост очереди? С вероятностью $\frac{1}{n}$ он выше всех прочих. И с вероятностью $\frac{n-1}{n}$ он не самый высокий. В первом случае станет видно на одного человека больше, а во втором число тех, кто виден, не изменится. Значит,

$$X_n = \frac{1}{n}\left(X_{n-1} + 1\right) + \frac{n-1}{n} X_{n-1} = X_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{E}\, X_n = \mathrm{E}\, X_{n-1} + \frac{1}{n} = \mathrm{E}\, X_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \ldots = \mathrm{E}\, X_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Заметим, что $\mathrm{E}\, X_1 = 1$, поскольку один человек всегда виден. Значит,

$$EX_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ответ: $EX_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

17. Удобно составить треугольную таблицу. Закрашенные ячейки соответствуют парам любимых носков. Например, пара $(2;4)$, помеченная знаком «X» соответствует случаю, когда первый любимый носок попался вторым, а второй – четвертым по счету. Все пары равновозможны, а общее их число равно C_n^2.

	2	3	4	5	...	n
1						
2			X			
3						
4						
5						
$n-1$						

В таблице видно распределение случайной величины ξ «Число снятых носков». По сути, таблица представляет собой диаграмму этого распределения: значения ξ берутся из первой строки, а соответствующие вероятности изображены под ними закрашенными столбиками.

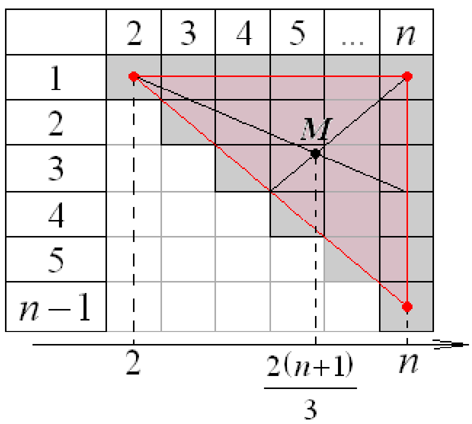
$$\xi \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & k & \ldots & n \\ \frac{1}{C_n^2} & \frac{2}{C_n^2} & \ldots & \frac{k-1}{C_n^2} & & \frac{n-1}{C_n^2} \end{pmatrix}$$

Найдем математическое ожидание:

$$\mathrm{E}\xi = \frac{1}{C_n^2} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{C_n^2}\left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k\right) =$$

$$= \frac{1}{C_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{C_n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)n}{2}\right) =$$

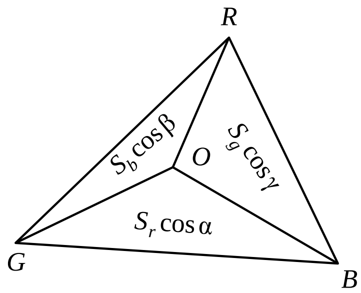
$$= \frac{1}{C_n^2}\frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{1}{C_n^2}\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{2(n+1)}{3}.$$



Возможно геометрическое решение: математическое ожидание – абсцисса центра масс M диаграммы. Изобразим вспомогательный треугольник с тем же центром масс и найдем абсциссу. Она равна среднему арифметическому абсцисс вершин:

$$\frac{n+n+2}{3}=\frac{2(n+1)}{3}.$$

18. Будем считать, что капля падает на крышу случайно в том смысле, что вероятность попадания её в какую-то область крыши пропорциональна площади проекции этой области на горизонтальную поверхность. Тогда нас должны интересовать площади проекций скатов на треугольное основание крыши.



Обозначим площадь зеленого ската S_g. Тогда площадь проекции этого ската на плоскость треугольника RBG, лежащего в основании крыши, равна $S_{ORB}=S_g\cos\gamma$, где γ — неизвестный нам угол наклона синего ската.

Обозначим S площадь треугольника RGB: $S_g=S\cos\gamma$. Следовательно, $S_{ORB}=S\cos^2\gamma$. Искомая вероятность равна

$$\frac{S_{ORB}}{S}=\frac{S\cos^2\gamma}{S}=\cos^2\gamma.$$

Осталось найти $\cos^2\gamma$. Введём обозначения S_r и S_b для площадей красного и синего скатов и проведя аналогичные выкладки, найдем:

$$S_{OBG}=S\cos^2\alpha;\ S_{ORG}=S\cos^2\beta.$$

Тогда

$$S=S_{OBG}+S_{ORG}+S_{ORB}=S\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right),$$

откуда $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Значит, $\cos^2\gamma=1-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.

Ответ: $1-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.

Литература

1. Е.А.Бунимович, В.А.Булычев, И.Р.Высоцкий и др., О теории вероятностей и статистике в школьном курсе, Математика в школе, №7, Москва, Школьная пресса, 2009, с. 3-13.

2. Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко, Преподавание теории вероятностей и статистики в школе по учебному пособию Ю.Н. Тюрина и др. «Теория вероятностей и статистика», Математика в школе, №7, Москва, Школьная пресса, 2009, с. 14-31.

3. И.Р. Высоцкий, Олимпиадные задачи по ТВ, Первое сентября, Январь 2012, с. 61-62.

4. Е.А.Бунимович, И.Р.Высоцкий и др., Терминология, обозначения и соглашения в школьном курсе теории вероятностей и статистики, Издательский дом Первое Сентября, Математика, №17, 2009, с. 13-27.

5. И.Р.Высоцкий, В.В.Бородкина и др., Заочная олимпиада по теории вероятностей и математической статистике, Издательский дом Первое Сентября, Математика, №15, 2009, с. 17-25

6. Ю.Н.Тюрин, И.Р.Высоцкий, Методические подходы к преподаванию теории вероятностей и статистики, Издательский дом Первое Сентября, Математика, №10, 2010, с. 8-19.

7. Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко, Теория вероятностей и статистика, Издательство МЦНМО, 2-е издание, 2008.

8. А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров, Введение в теорию вероятностей, Москва, Наука, 1982.

9. А. Мостеллер, Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, Москва, Наука, Физматлит, 3-е издание, 1985.

10. И.Р.Высоцкий, П.И.Захаров, В.В.Нестерова, И.В.Ященко, Теория вероятностей и статистика, Задачи заочных Интернет-олимпиад, Москва, Издательство МЦНМО, 2011.

11. Ю.Н.Благовещенский, Тайны корреляционных связей в статистике, Москва, «Научная книга», 2009.

12. К.Л. Чжун, Ф. Аит-Сахлиа, Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика, Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.