И. ВЫСОЦКИЙ,
В. ШАПАРИНА,
г. Москва

ОБ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В ШКОЛЕ

Условная вероятность — одно из краеугольных понятий теории вероятностей. События, которые наступают в ходе случайного эксперимента, могут менять вероятности других событий — увеличивать или уменьшать их. Вероятность выбросить два орла, дважды бросая монету, равна 0,25. Но если в первый раз орел уже выпал, то эта вероятность повышается до 0,5. А если при первом броске выпала решка, то вероятность события «два орла» тут же снижается до нуля.

Мы все знаем формулу условной вероятности события A при условии B, которая обычно принимается как само собой разумеющееся. Следование этой формуле подразумевает формальное описание свершившегося события B и поиск его вероятности, а также поиск вероятности совместного наступления событий A и B. При этом суть формулы часто остается таинственной, а условную вероятность часто смешивают с вероятностью пересечения событий.

Нам кажется, что школьный рассказ об условной вероятности должен апеллировать к формуле в последнюю очередь. Гораздо важнее научиться находить вероятности одного и того же события при разных условиях на практике. Здесь хорошо помогут диаграммы, схемы, графы и просто здравый смысл.

Ключом является правило умножения вероятностей последовательно рассматриваемых событий. Например, пусть событие B случается с вероятностью $x = 0{,}3$, и при условии, что B наступило, событие A имеет вероятность $y = 0{,}7$. Тогда событие $A \cap B$ имеет вероятность $xy = 0{,}21$.

Если это рассуждение кажется не очень понятным, сравните его со следующим рассуждением, в котором нет слова «вероятность»: 30% всех домов в поселке — двухэтажные; 70% двухэтажных домов в поселке выкрашено в зеленый цвет; это значит, что $0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 100\% = 21\%$ всех домов — это двухэтажные дома зеленого цвета.

В принятых терминах и обозначениях теории вероятностей правило умножения записывается так:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B). \tag{1}$$

Вертикальная черта перед событием B означает, что событие B рассматривается не как случайное, а как уже наступившее событие, изменившее вероятность события A.

Вместо того чтобы запоминать формулу, лучше научиться ее применять. Это удобно и легко сделать с помощью дерева случайного опыта, где правило умножения становится наглядным. В дереве элементарные события изображаются цепочками, идущими от начальной вершины S (start) к конечным вершинам. Чтобы найти вероятность элементарного события, то есть цепочки, нужно умножить условные вероятности вдоль этой цепочки.

Проиллюстрируем сказанное. На рисунке 1 дерево некоторого случайного опыта, в котором могут наступить несовместные события M и N, а затем события A, B и C.

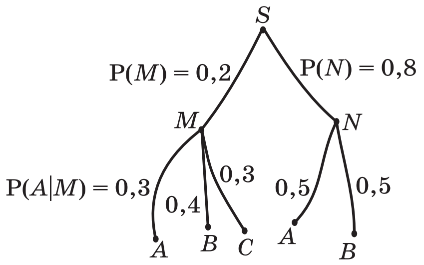

Рис. 1. Дерево некоторого случайного опыта

Найдем вероятность события $A \cap M$. Это событие наступает, только если осуществляется цепочка SMA: сначала наступает M, а затем — событие A при условии, что M уже случилось. Поэтому

$$\mathrm{P}(A \cap M) = \mathrm{P}(SMA) =$$
$$= \mathrm{P}(M) \cdot \mathrm{P}(A|M) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

Когда мы написали, что правило умножения принято записывать в виде (1), мы немного погрешили против истины. Обычно множители записывают в другом порядке:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B). \quad (2)$$

Согласитесь, вроде то же самое, но нарушено восприятие: запись не соответствует мыслимому порядку наступления событий: сначала B, а затем A. Почему используется именно такой порядок множителей — вопрос правильный и интересный, но ответ выходит за рамки нашего рассказа. Упомянем лишь, что такой порядок аналогичен принятому порядку множителей при записи дифференциала функции $f(x)dx$ и что эта аналогия не случайна.

Если $\mathrm{P}(B) \neq 0$, то равенство (2) равносильно известной формуле условной вероятности

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}. \quad (3)$$

Если принять эту формулу как определение (так обычно поступают), то смысл условной вероятности остается туманным, а правило умножения появляется как следствие. Нам представляется разумным противоположный путь — от интуитивного понимания условной вероятности и умножения долей к решению задач с помощью деревьев. При желании и необходимости можно дойти до формулы (3) как естественного, но не очень нужного следствия.

Формула Байеса

Если совместить на одном рисунке цепочки *SAB* и *SBA*, ведущие от начала эксперимента S, мысленно упорядочивая события A и B двумя способами, то обе эти цепочки разными путями приведут нас к одному и тому же событию $A \cap B$. Обычно никакого «порядка событий» нет. Мы скорее говорим об удобном порядке рассмотрения событий. Какое из них считать первым — условность. В разных задачах удобно по-разному.

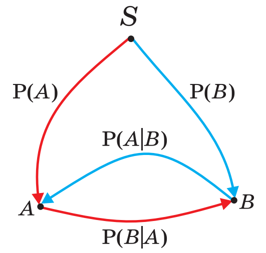

Рис. 2. Событие A ∩ B достигается разными путями

Например, если эксперимент состоит в последовательных бросаниях монеты, то разумно рассматривать события в том порядке, в котором они наступают.

Получаются два равенства:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A),$$
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B).$$

Приравняем правые части:

$$\mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A). \quad (4)$$

Если $\mathrm{P}(A) \neq 0$, то можно записать

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}. \quad (5)$$

Удивительно, что равенство (5) называют формулой Байеса. Причина сугубо историческая: Томас Байес (1702–1763) — английский математик XVIII в. вошел в историю благодаря теореме, доказанной именно в форме (5). Именно это равенство представлялось в те времена крайне важным, ведь оно давало возможность оценить вероятность события B при условии A, если известна вероятность A при условии B.

Мы не преувеличиваем. То, что мы сейчас изложили в нескольких строках с помощью схемы на рисунке 2, в середине XVIII в. представляло собой факт громадного значения, получивший имя первооткрывателя.

Возможно, формула Байеса действительно является фактом громадного значения, поскольку обладает свойством фундаментальных фактов: частные случаи формулы Байеса в большинстве приложений выглядят намного сложнее, чем формула в самом общем виде.

Формула полной вероятности

Снова обратимся к дереву на рисунке 1 и найдем вероятность события A, которое, как мы видим, может наступить не только при условии M, но и при условии N. Значит, вероятность события A равна сумме вероятностей двух благоприятствующих ему элементарных событий, то есть цепочек SMA и SNA (рис. 3).

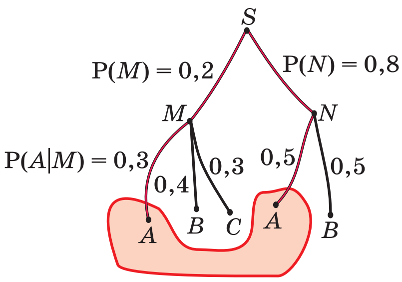

Рис. 3. Собираем полную вероятность события A из двух «неполных», то есть из вероятностей двух цепочек

$$P(A) = P(SMA) + P(SNA),$$
$$P(A) = P(M) \cdot P(A|M) + P(N) \cdot P(A|N).$$

Снова поменяв местами множители в угоду сложившейся традиции (напомним, что эта традиция не просто так), получим формулу полной вероятности события A и гипотез M и N:

$$P(A) = P(A|M) \cdot P(M) + P(A|N) \cdot P(N).$$

В данном конкретном случае получается:

$$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}46.$$

Последнее равенство, записанное в числах, заставляет задуматься над аналогией между вероятностью и средним арифметическим. Действительно, ведь написанное есть не что иное, как среднее арифметическое двух вероятностей 0,3 и восьми вероятностей 0,5.

Остановимся и не будем продолжать строить аналогии. Вместо того предложим три урока для 8–9-х классов. Уроки разработаны для проекта «Математическая вертикаль» и соответствуют учебным пособиям [1–4].

Урок 1. Условная вероятность

Цель: сформировать представление об условной вероятности.

Часто случайное событие A в случайном опыте приходится рассматривать при условии, что уже произошло некоторое событие B. Наступление события B меняет эксперимент. По сути, при наступ2лении некоторого события мы получаем новый эксперимент, вероятности других событий при этом могут измениться.

Пример 1. В семье двое детей. Если считать, что рождение мальчика и девочки равновозможны, ответьте на вопросы:

а) какова вероятность того, что в семье оба ребенка девочки;

б) известно, что один из них девочка. Какова вероятность того, что другой ребенок тоже девочка?

Желательный результат обсуждения. В случае «а» элементарных исходов четыре: ММ, МД, ДМ, ДД. Вероятность рождения двух девочек равна $\frac{1}{4}$. В пункте «б» спрашивается тоже о вероятности рождения двух девочек. Но кардинальное отличие состоит в том, что вероятность надо найти исходя из дополнительного условия: один из детей — девочка. Это условие меняет суть эксперимента. Элементарных событий уже не четыре, а три: МД, ДМ, ДД. И искомая вероятность события ДД равна $\frac{1}{3}$, а это больше, чем $\frac{1}{4}$.

Мы нашли вероятность того, что в семье две девочки, при условии, что один ребенок — девочка. И она отличается от вероятности такого же события «две девочки», которое рассматривается без условий. Условие «один из детей — девочка» увеличило вероятность двух девочек.

Вероятность наступления события при условии, что какое-то событие заведомо наступило, называется *условной вероятностью*.

Определение условной вероятности. Вероятность события A при условии, что событие B произошло, называется условной вероятностью события A при условии события B. Обозначается эта вероятность $P(A|B)$.

Рассмотрим это понятие подробнее.

Пример 2. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятности событий:

а) в первый раз выпало менее шести очков и сумма очков равна 8;

б) в первый раз выпало менее шести очков, если известно, что сумма выпавших очков равна 8.

Желательный результат обсуждения. Введем обозначения для событий: A «в первый раз выпало не больше 5 очков» и B «сумма выпавших очков равна 8».

В пункте «а» нужно найти вероятность пересечения событий A и B. Благоприятствующих исходов всего $N(A \cap B) = 4$ (рис. 4), поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

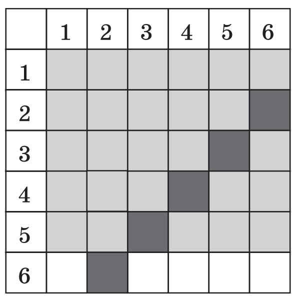

Рис. 4

В пункте «б» нужно найти вероятность события A при условии, что событие В наступило. Такое событие обозначается $A|B$.

Если событие наступило, то от всего эксперимента осталось лишь пять элементарных событий: (6; 2), (5; 3), (4; 4), (3; 5), (2; 6). Событию A из них благоприятствуют четыре последних (рис. 5).

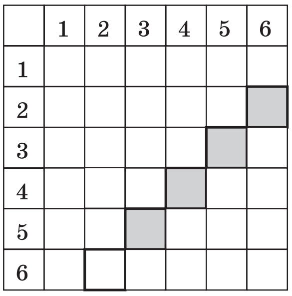

Рис. 5

Поэтому
$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Чтобы понять, чем отличается безусловная вероятность от условной, проиллюстрируем эксперименты на диаграммах Эйлера (рис. 6).

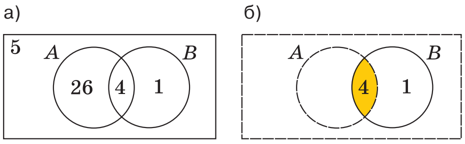

Рис. 6

В пункте «а» мы нашли вероятность события исходя из того, что всего элементарных событий 36 (рис. 6,*а*). Когда же нас просят найти условную вероятность «б», эксперимент уже другой — он свелся к событию B (рис. 6,*б*), и нужно найти долю благоприятных исходов уже не среди всех 36 событий, а среди пяти, благоприятствующих событию B.

Пример 3. При двукратном бросании игральной кости сумма выпавших очков равна 9. Найдите условную вероятность следующих событий:

а) в первый раз выпало 5 очков;

б) при одном из бросков выпало 4 очка;

в) в первый раз выпало меньше очков, чем во второй;

г) во второй раз выпало меньше чем 3 очка.

Ответ: а) 0,25; б) 0,5; в) 0,5; г) 0.

Пример 4. В некотором опыте произошло событие B. Может ли это:

а) увеличить вероятность другого события;

б) уменьшить вероятность другого события?

Приведите примеры, когда условная вероятность события больше и когда она меньше исходной вероятности этого события.

Желательный результат обсуждения. Самые простые примеры можно привести с помощью бросания монет или игральной кости. Например, при двукратном бросании двух монет событие «хотя бы раз выпал орел» имеет вероятность 0,75.

Но если известно, что при первом броске выпал орел, то вероятность этого события увеличивается до 1. Напротив, если в первый раз выпала решка, то событие «хотя бы раз выпал орел» становится менее вероятным: вероятность уменьшается до 0,5.

Если же события относятся к разным броскам, то они не влияют друг на друга. Например, события «в первый раз выпал орел» и «во второй раз выпала решка» не влияют друг на друга: наступление одного из них не влияет на вероятность другого.

Таким образом, вероятность события A при условии события B может вырасти, уменьшиться или остаться прежней.

Пример 5. Игральную кость бросают дважды. Событие A заключается в том, что при втором броске выпало не больше 3 очков. Приведите пример события, наступление которого:

а) не меняет вероятность события A;

б) уменьшает вероятность события A;

в) увеличивает вероятность события A.

Желательный результат обсуждения. Вероятность события A равна 0,5. Некоторое событие B не изменит вероятность события A, если при наступлении события B доля элементарных исходов, благоприятствующих A, не изменится и будет составлять половину всех исходов, благоприятствующих B. Таких событий много, например, «на первой кости выпало 1 очко». Сопроводите объяснение рисунком (рис. 7), из которого видно, что из шести исходов, благоприятствующих B, ровно половина благоприятствует A.

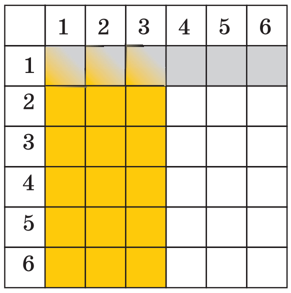

Рис. 7

Аналогично некоторое событие B уменьшит вероятность события A, если доля элементарных исходов, благоприятствующих A, среди исходов, благоприятствующих B, меньше половины, и увеличит, если больше.

Например, событие, изображенное темными квадратами на рисунке 8, увеличивает вероятность наступления события A: его вероятность при условии B составляет $\frac{3}{5}$, что больше, чем 0,5. Событие B можно описать как «сумма выпавших очков равна 6».

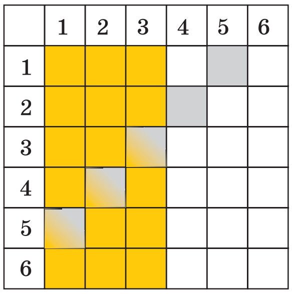

Рис. 8

Уменьшает вероятность события A, например, событие «сумма выпавших очков равна 8» (рис. 9): она становится равна $\frac{2}{5}$.

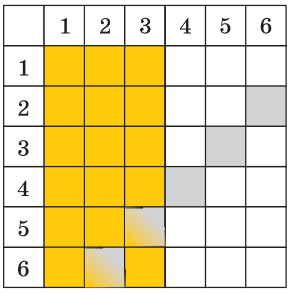

Рис. 9

Предложите ученикам придумать другие примеры для каждого из пунктов.

Выводы и итоги урока. Условная вероятность — это вероятность случайного события при условии, что какое-то другое событие уже произошло и перестало быть случайным. Как только какое-то событие наступило, опыт изменился, а вместе с ним изменились вероятности других событий. Условная вероятность события может быть меньше или больше начальной (безусловной) вероятности. Иногда случается, что наступление одного события не меняет вероятность другого (в этом случае говорят, что события независимы).

Урок 2. Правило умножения

Цели:

– познакомиться с правилом умножения вероятностей;

– научиться применять формулу умножения вероятностей и вычислять условные вероятности.

На уроке 1 учащиеся узнали, что для нахождения вероятности события A при условии наступления события B нужно найти долю исходов, благоприятствующих A, не среди всех элементарных событий опыта, а лишь среди тех, что благоприятствуют событию B.

Пример 1. В некотором городе пятую часть населения составляют дети и подростки. Среди взрослых жителей четверть не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Какова вероятность того, что случайно выбранный житель города — взрослый работающий человек?

Желательный результат обсуждения. Искомая вероятность равна доле взрослых работников среди всего населения города. Из условия ясно, что взрослые составляют $\frac{4}{5}$ населения города и $\frac{3}{4}$ из них работают. Значит, $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$ населения — взрослые работающие люди. Искомая вероятность равна 0,6.

Предложите учащимся посмотреть на эту задачу с другой стороны. Пусть событие A «выбранный горожанин работает» и событие B «выбранный горожанин — взрослый». Из условия следует, что доля взрослого населения $\frac{4}{5}$ и есть вероятность $P(B)$. А $\frac{3}{4}$ — доля работающих среди взрослого населения — это условная вероятность $P(A|B)$. Вероятность одновременного наступления событий A и B оказалась равна произведению вероятностей, то есть

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Эту формулу мы получили на примере, но она верна для любых случайных событий в любых случайных опытах. Полученное равенство мы назовем *правилом умножения вероятностей.*

Правило умножения вероятностей. Вероятность пересечения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Если вероятность события B больше нуля, то из этой формулы следует способ нахождения условных вероятностей:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Пример 2. В парке установлены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в каждом отдельном автомате, равна 0,3. В обоих автоматах кофе заканчивается к вечеру с вероятностью 0,21. Вечером пришел мастер, чтобы обслужить автоматы, и обнаружил, что в первом кофе закончился. Какова теперь вероятность того, что во втором автомате кофе тоже закончился?

Желательный результат обсуждения. Введем обозначения событий: A «кофе закончился в первом автомате» и B «кофе закончился во втором автомате». Во всех четырех областях диаграммы подпишем вероятности соответствующих событий (рис. 10).

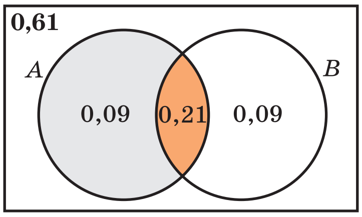

Рис. 10

Нужно найти вероятность события B при условии, что событие A наступило, то есть вероятность $\mathrm{P}(B|A)$. Запишем правило умножения:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A).$$

Подставим известные из условия значения: $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}21$. Получается:

$$0{,}21 = 0{,}3 \cdot \mathrm{P}(B|A),$$

откуда

$$\mathrm{P}(B|A) = 0{,}7.$$

Пример 3. Предположим, что в некотором городе 48% населения — мужчины, а среди мужчин 15% — пенсионеры. Какова вероятность того, что случайно выбранный житель города окажется мужчиной на пенсии?

Ответ: 0,072.

Пример 4. В некотором случайном опыте могут наблюдаться события A и B, причем $\mathrm{P}(A) = 0{,}75$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$, а вероятность совместного наступления этих событий $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}5$. Найдите:

а) вероятность события A при условии, что наступило событие B;

б) вероятность события B при условии, что наступило событие A.

Желательный результат обсуждения. Из правила умножения выразим условную вероятность события A при условии B:

$$\mathrm{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625.$$

Аналогично можно получить условную вероятность B при условии A:

$$\mathrm{P}(B\,|\,A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0{,}5}{0{,}75} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667.$$

Пример 5. Тест по истории сдали 85% учащихся школы, а тест по английскому языку — 70% учащихся. Известно, что тест по английскому языку сдали 77% тех, кто сдал тест по истории. Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик из тех, кто сдал тест по английскому, также сдал тест по истории.

Желательный результат обсуждения. Введем обозначения: событие A «случайно выбранный ученик сдал тест по английскому», событие B «случайно выбранный ученик сдал тест по истории». Тогда, по условию,

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}7,$$
$$\mathrm{P}(B) = 0{,}85,\ \mathrm{P}(A|B) = 0{,}77.$$

А найти нужно $\mathrm{P}(B|A)$.

Из правила умножения следует равенство

$$\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B).$$

Подставляя известные значения, находим

$$0{,}7 \cdot \mathrm{P}(B|A) = 0{,}85 \cdot 0{,}77,$$

откуда

$$\mathrm{P}(B|A) = 0{,}935.$$

Пример 6. Тест по обществознанию сдали 90% учащихся школы, а тест по химии сдали 75% учащихся. При этом известно, что тест по химии сдали 63% тех, кто сдал тест по обществознанию. Найдите вероятность того, что ученик, случайно выбранный из тех, кто сдал тест по химии, также сдал тест по обществознанию.

Ответ: 0,756.

Пример 7. Рассеянный ученый проводил исследование и в некотором случайном эксперименте у него получились следующие вероятности:

$$\mathrm{P}(N) = 0{,}44,\ \mathrm{P}(M) = 0{,}8,\ \mathrm{P}(N|M) = 0{,}65.$$

Не ошибся ли он?

Решение. Ошибся.

$$\mathrm{P}(N \cap M) = \mathrm{P}(M) \cdot \mathrm{P}(N|M) = 0{,}8 \cdot 0{,}65 = 0{,}52,$$

что больше, чем $\mathrm{P}(N)$. Вероятность пересечения событий не может быть больше вероятности любого из этих событий.

Пример 8. В некотором случайном опыте наступление события B увеличивает вероятность события A. Докажите, что в этом случае наступление события A увеличивает вероятность события B.

Выводы и итоги урока. Правило умножения вероятностей и формула условной вероятности, которая получается из этого правила, позволяют решать многие задачи, не разбираясь подробно в том, как именно устроен эксперимент. Они верны не только для опытов с равновозможными элементарными событиями, но и вообще для любых случайных опытов. Это делает изученные формулы удобным инструментом решения задач.

Урок 3. Дерево случайного опыта

Цели:

– познакомиться с деревом случайного опыта — удобным инструментом для наглядного представления случайного опыта;

– научиться строить дерево случайного опыта;

– научиться решать задачи на вычисление вероятностей при помощи дерева случайного опыта.

Дерево случайного опыта или *дерево вероятностей* — удобный инструмент решения задач, который позволяет рассматривать составной эксперимент как бы «по частям», мысленно расположить случайные события во времени или разбить на этапы. Объясним, как строить дерево эксперимента, на примере.

Пример 1. Велосипедист едет по парковой дорожке (рис. 11) и планирует выехать из парка через один из пяти выходов (A, B, C, D или E).

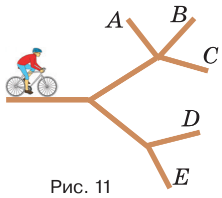

Рис. 11

Велосипедист едет только вперед и на каждой развилке случайным образом выбирает одну из дорожек, по которой еще не ехал. Какова вероятность того, что велосипедист покинет парк:

а) через выход A;

б) через выход E?

Желательный результат обсуждения. Начальное состояние, когда велосипедист не проехал ни один из перекрестков, изобразим точкой S (рис. 12).

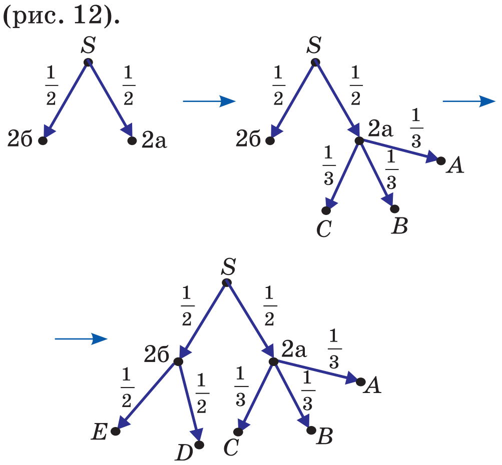

Рис. 12

Начальную точку, конечную и точки ветвления будем называть *вершинами* дерева.

На первом перекрестке велосипедист может с равными шансами поехать к одному из двух перекрестков — назовем их 2а и 2б. Проведем стрелки от точки S вниз, вправо и влево. Стрелки будем называть *ребрами* дерева. Около ребер подпишем вероятности событий: в нашем случае вероятности равны $\frac{1}{2}$, так как, по условию, велосипедист выбирает дальнейший путь случайным образом.

Предположим, что велосипедист поехал к перекрестку 2а. После этого может наступить одно из трех событий: он направится к выходу A, к выходу B или к выходу C. Изобразим эти элементарные исходы точками A, B и C и проведем к ним ребра. Вероятности тоже будут одинаковы и равны $\frac{1}{3}$. Аналогично изобразим варианты, когда велосипедист поехал к перекрестку 2б.

Обратите внимание учащихся на то, что сумма вероятностей около всех ребер, выходящих из одной вершины, равна единице. При построении дерева эксперимента важно за этим следить, особенно поначалу.

Элементарные события эксперимента в дереве изображаются конечными вершинами дерева. К каждой конечной вершине ведет единственная цепочка от точки S. Поэтому можно считать, что элементарные события изображаются не только конечными вершинами, но и ведущими к ним цепочками. Например, в нашей задаче пять элементарных исходов и, соответственно, пять цепочек. Событию «велосипедист выехал через выход A» соответствует цепочка S—2а—A.

Вероятности, которые мы подписывали на ребрах, — условные. Например, условная вероятность того, что велосипедист покинет парк через выход A, при условии, что он был на перекрестке 2а, равна $\frac{1}{3}$.

Предложите учащимся найти вероятности всех возможных элементарных событий. Для этого, пользуясь правилом умножения вероятностей, нужно найти произведения условных вероятностей вдоль каждой цепочки, ведущей от S к конечной вершине. Найденные произведения нужно сложить. Подпишите полученные вероятности на рисунке рядом с элементарными событиями (рис. 13).

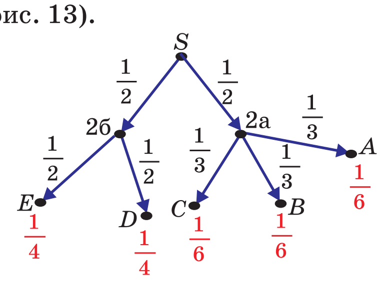

Рис. 13

Сумма всех вероятностей должна равняться единице (как сумма вероятностей элементарных событий). Более сложные события (не элементарные) изображаются на дереве промежуточными вершинами или какой-либо фигурой, объединяющей элементарные исходы.

Пример 2. Пусть известно, что выходы D и C ведут к пруду. Найдите вероятность того, что велосипедист выедет из парка к пруду.

Желательный результат обсуждения. На рисунке обведем элементарные события, благоприятствующие событию «велосипедист выедет к пруду» (рис. 14).

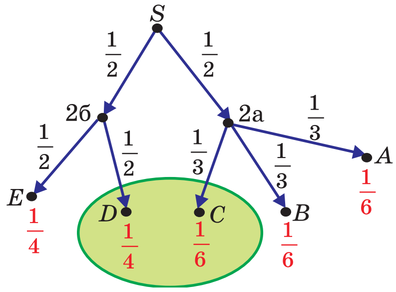

Рис. 14

Искомая вероятность равна сумме вероятностей наступления этих исходов, то есть

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}.$$

Можно сформулировать общее правило нахождения вероятностей событий с помощью дерева. Оно получается из правила сложения вероятностей элементарных событий.

Правило сложения. Чтобы найти вероятность события с помощью дерева, нужно сложить вероятности всех цепочек, ведущих к этому событию от начальной вершины.

Пример 3. На рисунке 15 изображено дерево опыта. Найдите:

а) $P(K)$; б) $P(b|K)$;
в) $P(A|K)$; г) $P(b)$;
д) $P(A)$.

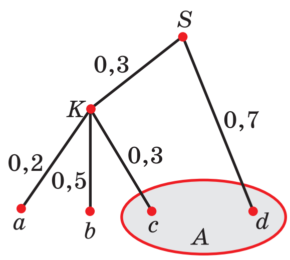

Рис. 15

Желательный результат обсуждения. Важно, чтобы учащиеся понимали, что вероятности из пунктов «а»–«в» уже подписаны на дереве:

$P(K) = 0{,}3$ — вероятность события K, то есть цепочки SK;

$P(b|K) = 0{,}5$ — вероятность ребра Kb;

$P(A|K) = 0{,}3$ — вероятность ребра Kc.

г) Чтобы найти вероятность элементарного события b, нужно перемножить вероятности вдоль цепочки SKb:

$$P(b) = P(K) \cdot P(b|K) = \\ = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

д) Событие A состоит из элементарных событий c и d.

$$P(d) = 0{,}7,\ P(c) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09,$$

поэтому

$$P(A) = P(c) + P(d) = 0{,}79.$$

Дерево вероятностей является удобным и универсальным инструментом решения вероятностных задач.

Пример 4. В группе 3 мальчика и 5 девочек. Случайным образом выбирают двух человек. Какова вероятность того, что будут выбраны один мальчик и одна девочка?

Желательный результат обсуждения. Мысленно разобьем одновременный выбор двух человек на два последовательных выбора и изобразим дерево случайного опыта (рис. 16).

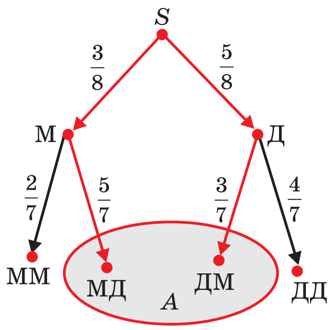

Рис. 16

Выбор мальчика обозначим буквой М, а девочки — буквой Д. При первом выборе вероятность выбрать мальчика равна $\frac{3}{8}$, а девочку равна $\frac{5}{8}$. При втором выборе вероятности выбора мальчика и девочки становятся условными и зависят от того, кто был выбран в первый раз. Если в первый раз был выбран мальчик, то мальчиков осталось 2 из 7 человек. Поэтому во второй раз мальчик будет выбран (ребро М–ММ) с вероятностью $\frac{2}{7}$, а девочка будет выбрана (ребро М–МД) с вероятностью $\frac{5}{7}$.

Точно так же, если в первый раз была выбрана девочка, остается 4 девочки и 3 мальчика из семи оставшихся детей. Вероятности выбора мальчика и девочки теперь $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$ соответственно.

Событию A «один мальчик и одна девочка» благоприятствуют два элементарных события, то есть цепочки S–М–МД и S–Д–ДМ (выделены красным цветом на рис. 16). Найдем вероятности этих цепочек и сложим результаты:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(S\text{–М–МД}) + \mathrm{P}(S\text{–Д–ДМ}) =$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{28}.$$

Пример 5. Автоматическая линия изготавливает зарядные устройства для телефонов. Известно, что 3% готовых устройств неисправны. Из этих неисправных устройств 98% обнаруживаются при контроле качества продукции. Однако система контроля ошибочно бракует 1% исправных устройств. Устройства, которые не забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранное сошедшее с автоматической линии зарядное устройство поступит в продажу.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево эксперимента (рис. 17).

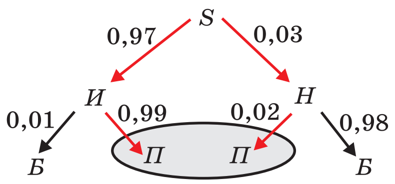

Рис. 17

Событие «устройство исправно» обозначим буквой $И$, а событие «устройство неисправно» — буквой $Н$. Устройства, забракованные системой контроля (а точнее, событие «устройство забраковано системой»), обозначим буквой $Б$, событие «устройство не забраковано» обозначим буквой $П$.

Событию $П$ «устройство не забраковано» благоприятствуют цепочки $SИП$ и $SНП$, поэтому

$$\mathrm{P}(П) = \mathrm{P}(SИП) + \mathrm{P}(SНП) =$$
$$= 0{,}97 \cdot 0{,}99 + 0{,}03 \cdot 0{,}02 = 0{,}9609.$$

Рассмотрим обратную задачу.

Пример 6. Агрофирма закупает куриные яйца в двух фермерских хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 80% яиц. Найдите вероятность того, что случайное яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево эксперимента (рис. 18).

Естественно, строить дерево, начиная с хозяйств. Так и поступим. Первое хозяйство (точнее, событие «яйцо из первого хозяйства») обозначим A, второе — B. Событие «выбранное яйцо окажется высшей категории» обозначим H, а остальные категории нам не нужны. Неизвестную вероятность события A «яйцо из первого хозяйства» обозначим p.

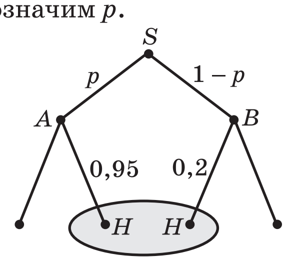

Рис. 18

Вероятность события H, по условию, равна 0,8. Этому событию благоприятствуют цепочки SAH и SBH, поэтому

$$\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(SAH) + \mathrm{P}(SBH) =$$
$$= p \cdot 0{,}95 + (1 - p) \cdot 0{,}2 = 0{,}75p + 0{,}2.$$

Составим уравнение

$$0{,}75p + 0{,}2 = 0{,}8,$$

откуда

$$p=\frac{0{,}6}{0{,}75}=0{,}8.$$

Пример 7. Игральную кость последовательно бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не станет больше или равна 4. Найдите вероятность, что будет сделано ровно два броска.

Желательный результат обсуждения. Нарисуем дерево. Полное дерево не нужно. Достаточно рассмотреть один-два первых броска. Найдем в дереве цепочки, благоприятствующие событию A «сумма выпавших очков станет больше или равна 4 при двух бросках». Обведем конечные вершины этих цепочек (рис. 19).

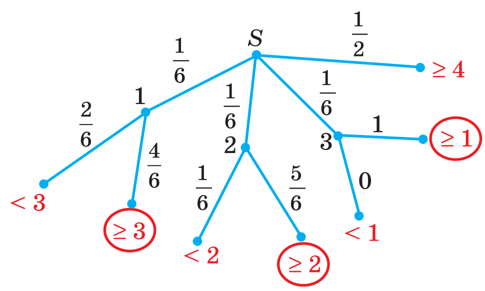

Рис. 19

Вероятность события A равна

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{4+5+6}{36}=\frac{5}{12}$$

В этом эксперименте очень много элементарных событий: все возможные серии бросков, когда при предпоследнем броске сумма выпавших очков меньше 4, а при последнем — больше или равна. Но с помощью дерева задача решается легко.

Пример 8. Экзаменационный билет состоит из трех вопросов. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9, на второй — 0,8, на третий — 0,7. Найдите вероятность того, что студент, выбрав случайный билет, ответит по крайней мере на два вопроса.

Ответ: 0,902.

Пример 9. На столе было десять монет: две по 10 рублей, а остальные по 5 рублей. Антон, не глядя, кладет в один карман три случайные монеты, а все остальные — в другой карман. Найдите вероятность того, что обе десятирублевые монеты оказались в одном кармане.

Ответ: 0,533.

Пример 10. Всем пациентам с подозрением на одну из тропических лихорадок делают анализ крови. Если анализ выявляет возбудителя лихорадки, то результат анализа называется положительным. У больных лихорадкой анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если лихорадки нет, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что у пациентов, поступающих с подозрением на лихорадку, анализ оказывается положительным в 19,6% случаев. Найдите вероятность того, что поступивший с подозрением пациент действительно болен этой лихорадкой.

Ответ: 0,2.

Выводы и итоги урока. Дерево эксперимента — удобный универсальный метод решения задач. События, изображенные на дереве, мысленно упорядочены. Это помогает применять правила сложения и умножения вероятностей, а также расширяет круг задач, доступных для решения. Поэтому даже при небольшом навыке деревья становятся излюбленным способом решения многих задач.

Литература

1. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО, 2011. **2.** *Высоцкий И.Р.* Дидактические материалы по теории вероятностей. 8–9 классы. — М.: МЦНМО, 2018. **3.** *Высоцкий И.Р., Макаров А.А., Тюрин Ю.Н., Ященко И.В.* Математическая вертикаль. Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2020. **4.** *Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Универсальный многоуровневый сборник задач. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2020. **5.** *Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2021.

Из интернета

Биологи доказали, что пчелы на самом деле не умеют считать

nation-news.ru2d

Сложность организации мозга насекомых уже давно ни у кого не вызывает сомнения. Этот тип не просто успешно просуществовал, но и эволюционировал именно благодаря сложному строению органов чувств и, как следствие, развитию совершенной нервной системы. В чем-то она даже превосходит человеческую: наш мозг не занят объединением информации от шести-восьми лап, крыльев, десятков глазков и пары антеннул.

Ранее были публикации, что австралийские ученые показали, что пчелы умеют считать до четырех. Притом число для них именно абстрактное понятие, так как пчелам неважно, что именно считать.

Биологи же из Института зоологии в Гуанчжоу доказали, что на самом деле пчелы не обладают навыками счета.

Чтобы доказать эту теорию, они провели специальный эксперимент. Группу насекомых разделили на две части. Каждую из них обучили выбирать определенную табличку с тем или иным числом объектов. Когда пчелы выбирали правильный ответ, их угощали сиропом.

Спустя 24 часа ученые усложнили задачу и заставили насекомых выбирать из двух табличек, на которых было одинаковое число элементов.

Как оказалось, пчелы, которые до этого летали к табличке с более сложными фигурами, также выбирали сложные объекты, и наоборот. Это доказывает, что при выборе насекомые опираются только на визуальное восприятие.