

Э. СОЛЕДАД,
DR. SOLEDAD R. ESTRELLA,
soledad.estrella@ucv.cl,
Чили, г. Вальпараисо

Перевод: Ю.А. Тюрина, И.Р. Высоцкий

Окончание. Начало в № 1/2016

О ПРЕПОДАВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ СТАТИСТИКИ В ШКОЛАХ ЧИЛИ

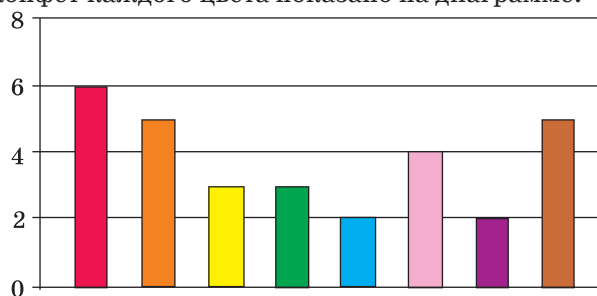
ТАБЛИЧНОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ

Тест для оценки знаний статистики и компетенций ее преподавания у учителей базового образования

Вопросы, отмеченные буквой **Ш**, предназначены для школьников, вопросы, отмеченные буквой **У**, предназначены только для учителей.

Задание 1. Конфеты

В коробке лежат конфеты разных цветов. Учитель разрешил Трини взять одну конфету из коробки, не заглядывая внутрь. Число конфет каждого цвета показано на диаграмме.



1Ш. Сколько в коробке оранжевых конфет?

- 1) 6 2) 4 3) 4,5 4) 5

2Ш. Конфет какого цвета в коробке ровно две штуки?

- 1) Желтого и зеленого; 2) Зеленого и синего;
3) Синего и фиолетового; 4) Оранжевого и фиолетового.

3Ш. Сколько синих конфет нужно добавить в коробку, чтобы количество синих и красных конфет стало одинаковым?

- 1) 6 2) 4 3) 2 4) Другое число

4Ш. Какова вероятность того, что Трини возьмет красную конфету?

- 1) 12,5% 2) 20% 3) 25% 4) 50%

1У. Приведите пример правильного и неправильного ответа, который могли бы дать ваши ученики.

2У. Укажите в учебнике раздел, соответствующий данному заданию.

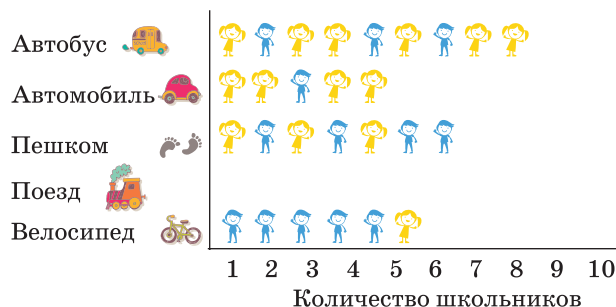


К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Тест.)

Задание 2. Том

Изучите диаграмму и ответьте на вопросы:

Как школьники добирались до школы сегодня



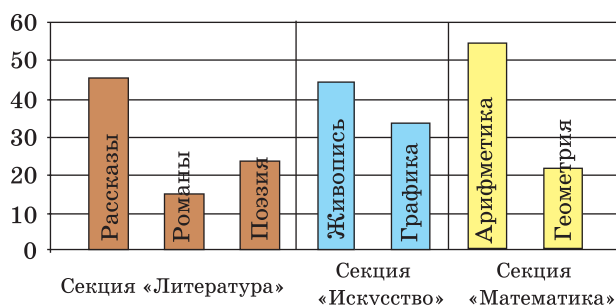
1III. Том не пошел в школу сегодня. Как, по вашему мнению, он будет добираться до школы завтра? Почему?

1У. Приведите примеры правильного и неправильного ответов, которые могли бы дать ваши ученики.

2У. Укажите в учебнике раздел, соответствующий данному заданию.

Задание 3. Библиотека

Внимательно изучите диаграмму и ответьте на вопросы, отмечая правильные варианты ответа.



1III. В какой секции среднее число выданных по подсекциям книг наибольшее?

1) В секции литературы 2) В секции искусства 3) В секции математики 4) Во всех секциях

2III. Анита сказала, что в секции математики среднее число выданных книг равно $\frac{55+21}{2} = 38$, поэтому наибольшее среднее число выданных книг — в секции математики.

Что вы думаете по поводу ответа Аниты?

- 1) Анита права, она выбрала секцию, где находится самый высокий столбик на диаграмме.
- 2) Анита ошибается, потому что общее число книг, выданных в секции литературы, больше всех.
- 3) Трудно сказать, почему Анита дала такой ответ.

1У. Предположим, что вы уже обсудили содержание учебника, относящееся к данной теме. Сколько ваших учеников сможет правильно ответить на этот вопрос?

1) Большинство 2) Больше половины 3) Чуть меньше половины 4) Меньше трети

2У. Успешная стратегия решения для ваших учащихся:

- 1) Ответить, пользуясь только числами, взятыми непосредственно из диаграммы.
- 2) Вычислить среднее по всем столбикам диаграммы.
- 3) Вычислить среднее число книг в каждой секции и сравнить их.
- 4) Вычислить сумму книг в каждой секции и сравнить их.

3У. По вашему мнению, для какого класса этот вопрос подходит лучше всего?

1) 5-й класс 2) 6-й класс 3) 7-й класс 4) 8-й класс

Обоснование: _____

Задание 4. Собаки и кошки

Хуан опросил своих одноклассников, у кого дома есть кошка или собака. Он собрал информацию, отмечая питомцев галочками, и вот что получилось:

Домашние питомцы одноклассников			Есть собака	Нет собаки
Гектор: собака✓, кошка	Карла: собака✓, кошка	Росио: собака✓, кошка✓	Есть кошка	
Матияс: собака, кошка✓	Мария: собака, кошка	Диего: собака, кошка✓		
Анита: собака, кошка	Кейко: собака, кошка✓	Консуэло: собака✓, кошка		
Татьяна: собака✓, кошка	Фрэн: собака, кошка✓	Изабель: собака✓, кошка		
Хуан: собака, кошка✓	Янет: собака✓, кошка✓	Себа: собака✓, кошка		
			Нет кошки	

1Ш. Заполнить таблицу Хуану помогали друзья. Получилось три таблицы. В каком случае помощь друга оказалась полезной?

(1)	Есть собака	Нет собаки	(2)	Есть собака	Нет собаки	(3)	Есть собака	Нет собаки	(4)
Есть кошка	2	6	Есть кошка	2	5	Есть кошка	8	7	другое
Нет кошки	5	2	Нет кошки	6	2	Нет кошки	6	2	

1У. В каком классе школьная программа предполагает изучать тему, соответствующую этому заданию?

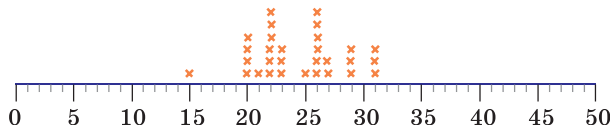
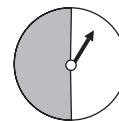
- 1) В 1-м
- 2) Во 2-м
- 3) В 4-м
- 4) В 5-м

2У. Предположим, что вы уже обсудили содержание учебника, относящееся к данной теме. Сколько ваших учеников сможет правильно ответить на этот вопрос?

- 1) Большинство
- 2) Больше половины
- 3) Чуть меньше половины
- 4) Меньше трети

Задание 5. Крутящаяся стрелка

Ваш класс проводит эксперимент: все крутят стрелку, прикрепленную к диску, как на рисунке (каждый ученик крутит стрелку 50 раз). На числовой прямой каждый ученик отметил крестиком, сколько раз у него стрелка остановилась на закрашенной части круга:



1Ш. Каково наименьшее число раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?

- 1) 0
- 2) 25
- 3) 15
- 4) Не знаю.

2Ш. Каково наибольшее число раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?

- 1) 50
- 2) 22
- 3) 26
- 4) 31

3Ш. Каков диапазон количества раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?

- 1) 16
- 2) 50
- 3) 31
- 4) Не знаю

4Ш. Какова мода числа раз, когда стрелка остановилась на закрашенной части круга?

- 1) 22
- 2) 22 и 26
- 3) 23, 29 и 31
- 4) Не знаю

5Ш. Если вы раскрутите стрелку, чему равна вероятность того, что она остановится на закрашенной части?

- 1) 0,5
- 2) 80%
- 3) 20 из 50
- 4) Не знаю

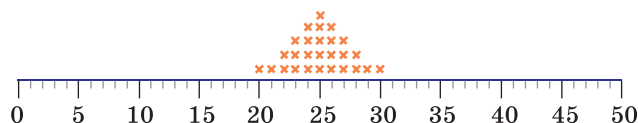
1У. Чему вы научите своих учеников, дав им эту задачу? (Что следует выделить больше всего.)

- 1) Правильно получать данные и проводить вычисления.
- 2) Читать графики и отвечать на ответы группой.
- 3) Наблюдать, как распределены данные, пользуясь данной информацией.
- 4) Понимать содержание данной темы школьной программы.

Задание 6. Крутящаяся стрелка

Представьте себе, что еще три класса провели эксперимент со стрелкой и кругом и составили диаграммы. При этом известно, что некоторые результаты сфабрикованы, а некоторые действительно получены в результате эксперимента.

1Ш. Внимательно изучите данный график. По вашему мнению, результаты эксперимента в классе А сфабрикованные или настоящие? Почему?

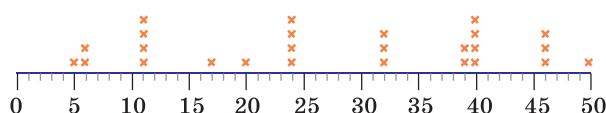


1) Сфабрикованные

2) Настоящие

Потому что _____

2Ш. Внимательно изучите данный график. По вашему мнению, результаты эксперимента в классе В сфабрикованные или настоящие? Почему?

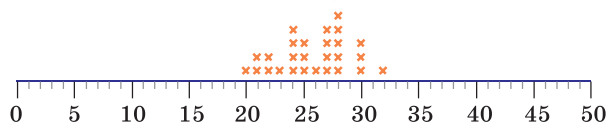


1) Сфабрикованные

2) Настоящие

Потому что _____

3Ш. Внимательно изучите данный график. По вашему мнению, результаты эксперимента в классе С сфабрикованные или настоящие? Почему?



1) Сфабрикованные

2) Настоящие

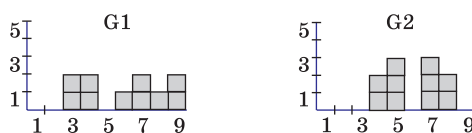
Потому что _____

1У. Какое из высказываний лучше всего объясняет, почему эту задачу нужно предлагать учащимся?

- 1) Чтобы они знали, что вы знаете, когда они жульничают.
- 2) Чтобы они могли принимать обоснованные решения, основываясь на понятии дисперсии.
- 3) Чтобы они могли наблюдать, как распределяются данные, и наблюдать дисперсию.
- 4) Чтобы улучшить их навыки чтения графиков и формирования правильных ответов.

Задание 7. Олимпийские игры

Двадцать школьников готовились к математической олимпиаде. Десять из них образовали команду 1 (G1), а остальные — команду 2 (G2). Очки, полученные на олимпиаде, показаны на графиках.



Каждый квадрат на диаграмме изображает число очков, полученных одним из участников. Например, в команде 1 два квадрата над цифрой 9 означают, что два члена этой команды получили по 9 очков.

1Ш. Какие из данных утверждений верны?

- 1) Команда 1 выступила лучше, чем команда 2, потому что участники, получившие наибольшее число очков, находятся в команде 1.
- 2) Команда 2 выступила лучше, потому что в ней нет участников, получивших меньше 4 очков.
- 3) Между двумя командами нет разницы, потому что средние значения очков в обеих командах одинаковы.
- 4) Хотя средние значения для обеих команд одинаковы, команда 2 более однородна, и поэтому она выступила лучше.

Задание 8. Опрос

В некотором государстве провели несколько опросов, чтобы определить уровень поддержки некоего кандидата в президенты на будущих выборах. Четыре газеты проводили независимые друг от друга опросы по всей стране. Результаты опросов показаны ниже:

- Газета 1. 36,5% (6 января, опрошена случайная выборка из 500 граждан, имеющих право голоса).
- Газета 2. 41,0% (20 января, опрошена случайная выборка из 500 граждан, имеющих право голоса).
- Газета 3. 39,0% (20 января, опрошена случайная выборка из 1000 граждан, имеющих право голоса).
- Газета 4. 44,5% (20 января, опрошена выборка из 1000 граждан, позвонивших по телефону).

1Ш. Если выборы назначены на 25 января, опрос какой газеты покажет наилучший прогноз уровня поддержки для данного кандидата в президенты?

1) Опрос газеты 1, потому что он был проведен раньше других и в нем использовалась случайная выборка.

2) Опрос газеты 4, потому что в нем проголосовало 1000 человек и это был телефонный опрос.

3) Опрос газеты 3, потому что он проводился близко к дню выборов и в нем использовалась случайная выборка из 1000 голосовавших.

4) Опросы газет 3 и 4, потому что их провели в один и тот же день и в них использовались выборки одинакового размера.

1У. Каков, по вашему мнению, наилучший порядок изучения понятий, используемых в этой задаче?

1) Выборка, популяция, случайная выборка, случайность, составление выборки, размер выборки.

2) Случайность, выборка, популяция, случайная выборка, составление выборки, размер выборки.

3) Случайность, популяция, выборка, случайная выборка, составление выборки, размер выборки.

4) Выборка, популяция, случайность, случайная выборка, составление выборки, размер выборки.

Задание 9. Вопросы

Учитель хочет узнать, сколько вопросов задали ученики. Ниже дана таблица с числом вопросов, заданных 8 учениками за одно занятие:

Ученики	Хуан	Люсия	Роберто	Ана	Педро	Мария	Луис	Клара
Число вопросов	0	5	2	22	3	2	1	2

Учитель хочет подвести итог и вычислить типичное число вопросов, заданных в этот день.

1Ш. Какой из методов вы порекомендовали бы? (Выберите один из следующих ответов.)

1) Использовать наиболее часто встречающееся число, в данном случае 2.

2) Сложить все восемь чисел и поделить результат на 8.

3) Выбросить 22, а остальные семь чисел сложить и поделить результат на 7.

4) Выбросить 0, а остальные 7 чисел сложить и поделить результат на 7.

1У. Чему должны научиться ваши ученики, решая эту задачу? (На что нужно обратить особое внимание.)

1) Структурировать свои навыки и знания и верно решать такие задачи.

2) Сосредотачиваться на информации и организовывать систему понятий.

3) Актуализировать имеющиеся знания, оценить их применимость и использовать в данной ситуации.

4) Работать в группе, научиться аргументировать в споре.

Задание 10. Мальчики и девочки

Вероятность того, что новорожденный окажется мальчиком, равна вероятности того, что новорожденный окажется девочкой. В родильных домах некоторого города ведется запись новорожденных мальчиков и девочек. В роддоме А зафиксировано 50 рождений в день, а в роддоме В — в среднем 10 рождений в день. Тогда в произвольный день:

1Ш. В каком роддоме выше вероятность записать 80% или больше рождений девочек?

1) В роддоме А (где 50 рождений в день).

2) В роддоме В (где 10 рождений в день).

3) Вероятность данного события одинакова для обоих роддомов.

4) Не знаю.

1У. Что важно знать учащимся, чтобы решить эту задачу?

1) Дисперсия в малых выборках.

2) Равновероятность.

3) Закон больших чисел.

4) Не знаю.

Задание 11. Лотерея

В лотерее нужно угадать 6 чисел от 1 до 40. Вы выиграете, если угадаете все шесть выпавших чисел. Вероника выбрала 1, 2, 3, 4, 5, 6. Роза выбрала 39, 1, 17, 33, 8, 27.

1III. У кого больше вероятность выиграть?

1) У Вероники.

2) У Розы.

3) У Вероники и Розы одинаковая вероятность выиграть.

4) Не знаю.

1У. Какие ответы показывают ошибочные представления учеников о случайных последовательностях?

1) 1 и 2

2) 1 и 3

3) 2 и 3

4) Не знаю

Задание 12. Кости

Предположим, что одновременно бросают две симметричные игральные кости.

1III. У какого событий наибольшая вероятность?

1) Выпадет пара (5; 6).

2) Выпадет пара (6; 6).

3) У обоих вариантов одинаковая вероятность.

4) Не знаю.

1У. Что важно знать учащимся, чтобы решить эту задачу?

1) Построение таблицы частот и/или дерева пространства элементарных событий.

2) Понятие пространства элементарных событий и благоприятствующего элементарного события.

3) Понятия пространства элементарных событий, равновероятности и неравновероятности.

4) Понятие случайного эксперимента и пространства элементарных событий.

Задание 13. Землетрясение

В дебатах о возможности прогнозирования землетрясений один геолог сказал: «В течение следующих 20 лет вероятность землетрясения в городе Хуз равна двум третям».

1III. Какое из следующих утверждений лучше всего отражает значение утверждения, высказанного геологом?

1) $\frac{2}{3}$ 20 приблизительно 13,33, следовательно, не раньше чем через 13, но не позже чем через 14 лет в городе Хуз случится землетрясение.

2) $\frac{2}{3}$ больше, чем $\frac{1}{3}$, следовательно, можно быть уверенным, что в какой-то момент в течение следующих 20 лет в городе Хуз случится землетрясение.

3) Вероятность того, что в городе Хуз случится землетрясение в течение следующих 20 лет, выше, чем вероятность, что землетрясения не произойдет.

4) Невозможно предсказать, что произойдет, поскольку нельзя быть уверенным, когда случится землетрясение.

1У. По вашему мнению, этот вопрос направлен на то, чтобы

1) Научить рассуждать и делать выводы о реальном значении вероятностных прогнозов.

2) Научить применять модель Лапласа, чтобы сделать вывод о значении вероятностной ситуации.

3) Заново осмыслить понятие неопределенности и неприменимости теории вероятности в некоторых случаях.

4) Подтвердить или опровергнуть утверждение, используя математические методы.

Задание 14. Домашние животные

Ученики второго класса записали данные о своих домашних животных в таблицу:

Животное	Число
Птица	2
Кошка	4
Черепаша	2
Собака	7
Утка	1

Животное	Число
Рыба	2
Белка	1
Дикобраз	3
Кролик	3

Когда обсуждали таблицу, один из учеников сказал: «Мода – собака, медиана – утка, а диапазон от 1 до 7».

1У. Если вы считаете, что ученик неправ, напишите, в чем его ошибка (ошибки): _____

РОССИЙСКИЙ КОММЕНТАРИЙ ЧИЛИЙСКОГО ОПЫТА

И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

■ Происходящее в России внедрение в школьные программы и в экзамены теории вероятности и статистики побуждает нас изучать опыт других стран. Судя по тексту статьи и прилагаемому аппарату исследования — тесту для школьников и учителей, доктор Соледад Ромеро Эстрелла задается теми же вопросами, что и мы: какое содержание курса статистики и вероятности существенно и для какого возраста оно оптимально или приемлемо.

Безусловно, культурные, образовательные, социально-экономические различия между Россией и Чили сказываются на впечатлении от статьи и тестовых материалов. Тем не менее ясно видно стремление обозначить круг вопросов, актуальных и для нас. Автор пишет: *«Введение статистики и теории вероятностей в ходе пересмотра школьных программ (Chile, 2009) произошло на десять лет позже, чем в других странах. Анализ показывает, что концепция изменчивости отсутствует в школьной программе и что важные понятия, такие как случайность и случайная величина, упоминаются вскользь. Кроме того, нет ясного намерения связать статистику и теорию вероятностей между собой, установить связь, которая может помочь в понимании дедуктивных методов в статистике»*.

В статье содержится косвенное указание на важное обстоятельство, которое мы неоднократно отмечали: статистика знакомит школьников с рядом важных понятий и терминов: средними значениями, дисперсией и стандартным отклонением, рассеиванием, частотами и вероятностями. Для формирования рационального мышления и общей грамотности современного человека владение этими понятиями важнее, чем функция, уравнение или неравенство.

Описанное в статье исследование проводилось в Чили среди школьников 4-х и 7-х классов (возраст — 9 и 12 лет; 994 участника), а также среди их учителей. Вопросы для школьников и для учителей были разными. Но тест составлен таким образом, чтобы ответы учителей проливали свет на способы рассуждения, ожидаемый прогресс, успехи, неудачи и типичные ошибки учащихся.

К сожалению, работа профессора Эстреллы не содержит результатов тестирования. Интересно

было бы получить их и сравнить с результатами аналогичного исследования в России, если такое удастся провести.

Закончив общий комментарий, обсудим отдельные задания теста.

Задание 2 «Том» — про школьников, которые добираются до школы разными способами, представляет интерес и вызывает целый ряд обсуждений. Требуется построить прогноз относительно того, как завтра будет добираться до школы Том, который сегодня не пошел в школу. Прогноз требуется сделать с помощью диаграммы, показывающей, каким способом добирались до школы одноклассники Тома. При этом имеются данные отдельно о мальчиках и о девочках.

Из статьи следует, что задание подразумевает верные или неверные ответы. Составители значительно варьируют степень «верности ответа».

Наивысший балл (пять) предлагается ставить за прогноз *«Вероятнее всего, автобус, поскольку большинство детей пользуется автобусом»* или *«Вероятнее всего, велосипед, поскольку большинство мальчиков приезжает на велосипеде»*.

Информации явно недостаточно, чтобы сделать определенный вывод, однако мы можем сравнить между собой шансы, что Том выберет тот или иной вид транспорта, при условии, что он вообще завтра собирается в школу. При этом нас не должно смущать то, что верных ответов несколько, поскольку ответом здесь является прогноз, а прогнозы всегда отличаются неопределенностью. Но не вполне понятно, почему эти два ответа предлагается оценивать одинаково. В первом случае прогноз делается без учета информации о половой принадлежности школьников, а во втором — эта важная информация используется, ведь есть основания считать, что Том — мальчик.

Проблема в том, что оба прогноза неудачны. Ведь, судя по диаграмме, *большинство* школьников не пользуются автобусом: пассажиров автобуса всего 9 из 27. Значит, на основании имеющихся данных вероятность того, что *случайно выбранный ученик* приедет на автобусе, оценивается числом $\frac{1}{3}$. Это плохой прогноз (он лучший из возможных, но полагаться на него трудно).

Если ограничиться только рассмотрением мальчиков, то ситуация не улучшается: оценка вероятности того, что *случайно взятый мальчик* придет на велосипеде, равна $\frac{5}{13}$. Это меньше $\frac{1}{2}$, так что нельзя сказать, что велосипед наиболее вероятен. Он вероятнее любого другого способа, но менее вероятен, чем совокупность других способов.

Разумным представляется ответ «*Трудно сделать определенный прогноз ввиду недостаточности информации*», который авторами задания оценивается всего в 1 балл.

Вместе с тем нужно отдать должное авторам вопроса — наибольший балл присуждается ответам, которые учитывают неопределенность предположения и лишены категоричности.

Задача не является плохой. Напротив, она очень хороша для обсуждения ситуации, которая часто возникает при построении прогнозов:

1. Иногда лучший прогноз, какой только можно сделать, вовсе не является достоверным или даже сколько-нибудь надежным, в том смысле, что на него можно полагаться.

2. Принимая в расчет дополнительную информацию (Том — мальчик), можно уточнить (улучшить?) оценку шансов того или иного события.

Обратим внимание еще на одну особенность задачи: по условию, Том сегодня остался дома. Таким образом, опрошена не вся совокупность одноклассников Тома, но группу опрошенных нельзя назвать и случайной выборкой, поскольку в нее не входит как раз нужный нам Том.

Эта задача очень интересна во всех отношениях: и как ситуация для обсуждения, и как материал для исследования. К сожалению, те же обстоятельства делают ее неудачной для оценки знаний, поскольку наиболее разумные ответы являются констатацией невозможности сделать сколько-нибудь достоверный прогноз.

Задание 3. Это задание вызвало наибольшие проблемы с переводом, да и с пониманием сути тоже. После неоднократных консультаций с автором исследования был сделан смысловой перевод. Назначение задачи — проверить, понимают ли школьники, что такое среднее, и не смешивают ли они среднее с наибольшим значением или с суммой.

Отдельного обсуждения заслуживает **задание 4**, которое проверяет умение составить таблицу сопряженности двух признаков. Трудно сказать, какое место таблицы сопряженности занимают в регулярном курсе статистики чилийских школ. Однако из статьи следует, что количественный анализ нечисловых объектов в том или ином виде входит в учебные программы. Здесь так же, как и при пользовании иными статистическими инструментами, важно научиться

строить гипотезы и оценивать их правдоподобность наивными средствами (без строгих доказательств), принимая во внимание отсутствие единственно верного ответа. Учебные ситуации такие, как в задании 4, формируют статистическую культуру в рассуждениях и записях.

Анализ качественных признаков с помощью таблиц восходит к англосаксонской школьной традиции. У нас нет данных о том, насколько глубоко изучаются эти вопросы в Чили или других странах. В России этот вид представления данных отсутствует не только в школе, но и в большинстве регулярных курсов статистики в высшей школе. Возможно, зря.

Задания 5 и 6 привлекают глубиной требующегося от школьников анализа. У школьников отсутствуют механизмы проверки гипотез. Вероятно, в задании 6 подразумевается использование статистической интуиции, развить которую в верном направлении должно задание 5. Смелый эксперимент.

Задание 7 — про школьников, готовившихся к олимпиаде, интересно тем, что погружает школьников в ситуацию, в которой не только не обозначен алгоритм, но еще и отсутствует стратегия решения. *Не предложено решающее правило*, позволяющее сказать, какая команда выступила лучше. Значит, нет однозначно верной альтернативы. Поясним: если бы было сказано, что побеждает та команда, где сильнейший участник, то ответ 1). Если бы было известно, что проигрывает команда, где самый слабый участник, то ответ 2). Если победитель определяется по среднему или по сумме баллов, то ответ 3). Если бы правило гласило, что при равных средних сильнее та команда, где рассеивание результатов меньше, — то 4). Но не сказано ничего. Таким образом, школьникам предлагается не столько выбрать ответ, сколько самостоятельно сформулировать разумное решающее правило для определения победителя. Задача очень ценная для исследования и последующего обсуждения.

Задание 10. Вероятно, правильный ответ на вопрос 1У: «Закон больших чисел». Трудность в том, что *от закона больших чисел далеко до аккуратного обоснования утверждения* о том, что вероятность большого отклонения частоты от вероятности на малой выборке больше, чем на большой. Вряд ли многие учителя (не говоря уже о школьниках), даже с привлечением сообщений о дисперсии малой и большой выборки, смогут доказать этот факт. Однако вопрос в тесте есть, и он прошел экспертизу восьми независимых экспертов. На что расчет? Видимо, на то, что составители теста считали, что дедуктивные доказательства не главное в статистике. Впрочем, мы считаем так же.

Мы тоже не будем доказывать. Просто поясним. Предположим, что родился только один ребенок. Мальчик. Странно? Нет, конечно. Частота рождения мальчика равна единице (один мальчик из одного возможного — это 100%). Частота отклонилась от вероятности на 0,5. И это, повторим, вовсе не удивительно.

Если же из 100 новорожденных 100 оказались мальчиками, нас это сильно удивит. Мы даже скажем, что это практически невозможно. То же самое отклонение частоты от вероятности 0,5 теперь нам представляется невероятным, ведь в выборке теперь не один ребенок, а 100 детей.

На этом примере мы видим, что понятие о действии закона больших чисел у нас срабатывает без вычислений и доказательств; здравый смысл подсказывает, что в выборке объемом 1 всё возможно, а в выборке объемом 100 число мальчиков не может значительно отклоняться от ожидаемого.

Значит, чем больше выборка, тем меньше должна быть вероятность того, что частота рождения мальчика отклонится от 0,5 на 0,3 или выше. Таким образом, задание теста подразумевает чисто интуитивное решение, поскольку ни семиклассники, ни большинство их учителей не смогут провести доказательство.

Обращают на себя внимание, казалось бы, близкие **задания 11 и 12**. С заданием 11 все ясно: очень многие подсознательно смешивают случайный выбор со сложностью случайной последовательности и будут утверждать, что случайное выпадение в лотерее шести номеров подряд намного менее вероятно, чем любая беспорядочная комбинация.

К сожалению, в статье отсутствуют комментарии к заданию 12. Если кости различимы, то указанные события равновероятны. Впрочем, условие содержит указание на одновременность бросания костей. Вероятно, тем самым подразумевается отсутствие «первой кости» и «второй кости», то есть кости неразличимы. В этом случае комбинация (5; 6) в два раза вероятнее, чем пара (6;6). Не зная ответов к тесту, мы не можем точно сказать, что имеется в виду, но это неважно. Важен сам по себе факт, что качественные задачи такого рода включены в исследование статистической и вероятностной культуры школьников 9–11 лет.

В последнем задании, **задании 14**, учителю предлагается прокомментировать ошибочное утверждение. Помимо ошибки в подсчете медианы, здесь имеется еще одна ошибка. Утка не может быть медианой просто потому, что медиана — числовая характеристика. В отличие от моды. Мода — показатель необязательно числовой. В данном случае модой действительно служит собака.

Упомянув о моде, заметим вот еще что. Мода встречается в тесте дважды. И оба раза имеется в виду мода очень небольших наборов. С нашей точки зрения, говорить о моде, имея дело с выборками (числовыми наборами) небольшого объема, — методическая и, если хотите, концептуальная ошибка. Мода — важная описательная характеристика тогда, когда имеется большой массив данных. Чаще всего — когда речь идет о значительных по объему выборках из непрерывных распределений, где значения приходится группировать. На малых выборках мода — крайне неустойчивый показатель, а поэтому изучение моды лучше оставить до того момента, когда она действительно понадобится.

В целом проведенное и описанное исследование представляется ценным для поиска плодотворных образовательных стратегий. Понимание того, насколько статистические и вероятностные явления являются интуитивными или контринтуитивными для учащихся различных возрастных групп, крайне важно для осмысленного (попытаемся употребить слово «правильного») планирования преподавания статистики и вероятности в школе. Отдельное достоинство исследования — включение в него учителей, участвовавших в опросе на тему (1) понимания реального соответствия между содержанием заданий и учебником и (2) оценки способностей школьников к восприятию важных понятий и терминов статистики и вероятности.

Мы надеемся, что сможем провести подобное исследование в России.



Бартоломе Эстебан Мурильо. Мальчики играют в кости. Мюнхен, Старая пинакотека