Е. НЕСОВА,
В. ПОКРОВСКИЙ,
nesovaelvl@gmail.com,
г. Москва

КАК ВВОДИТЬ ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Уже свыше десяти лет элементы теории вероятностей входят в школьный курс математики. За это время поменялись стандарты образования, вышли новые учебники, написано немало статей, однако теория вероятностей остается «камнем преткновения» как для учащихся, так и для учителей. Главную причину этого авторы статьи [1] видят «в скудности и низком качестве методических пособий», вызванных отсутствием «школьных традиций преподавания вероятности и статистики». С ними нельзя не согласиться, но, по нашему мнению, это касается в первую очередь определения вероятности случайного события. Обсудим возможные варианты определения первоначальных понятий теории вероятностей в основной школе.

В процессе становления теории вероятностей можно выделить три определения вероятности случайного события (слово «случайный» далее зачастую будем опускать). Так называемое классическое — отношение числа благоприятных исходов случайного эксперимента к общему числу равновероятных исходов. Статистическое — частота наступления события в серии экспериментов. И, наконец, аксиоматическое (колмогоровское) — мера события.

Какое из этих определений нужно давать при изучении теории вероятностей в основной школе, ведь в некоторых учебниках присутствуют все три определения? Ответ на этот вопрос во многом определяет концепцию школьного курса теории вероятностей.

Не останавливаясь на причинах, породивших такое разнообразие, скажем лишь, что в учебнике для основной школы не должно быть даже двух определений одного и того же понятия, тем более такого непростого, как вероятность события.

Рассмотрим аргументы в пользу каждого из перечисленных определений.

Классическое определение исходит из понятия равновероятных событий (термин «равновероятные» на первый взгляд кажется некорректным, поскольку вероятность события еще не определена, однако его можно понимать как самостоятельный термин, не опирающийся на понятие «вероятность события»). Удобство этого определения в его непосредственной связи с комбинаторными задачами, составляющими значимую часть школьного раздела «элементы стохастики». Однако оно имеет существенные недостатки. Главный из них, на наш взгляд, заключается в следующем.

При формулировке классического определения в учебной литературе для школы употребляется термин «равновозможные» события. Такое раздвоение термина вносит путаницу: чем различаются равновероятные и равновозможные события? А если это одно и то же, то зачем нужны два термина? Мы затрудняемся указать первоисточник термина «равновозможные», однако он употребляется уже в [2], где, в частности, сказано: «На вопрос, какие случаи можно считать равновозможными, математика не дает ответа» [2, с. 11]. Как же можно класть в основу математического определения неопределенное понятие равновозможности?

Дело в том, что термин «равновозможные события» относится к *приложениям* теории вероятностей, то есть к событиям, происходящим при некоем реальном или мыслимом эксперименте: бросании кубика, монеты и т.п. Поэтому-то математика и не дает ответа на вопрос, какие случаи можно считать равновозможными. Этот вопрос выходит за рамки математики, значит, о формальном *математическом* определении в этом случае речи не идет. Сказанное не означает, что математика ничем не может помочь при установлении равновероятности конкретных событий. Таким образом, классическое определение вероятности исходит из содержательных, выходящих за рамки математики понятий со всеми вытекающими из этого неудобствами [3] и единственным отмеченным выше преимуществом — непосредственной связью с комбинаторикой.

Статистическое определение сразу же после появления вызвало много вопросов и подверглось критике из-за существенной неопределенности в формулировках. На эту критику со временем был дан удовлетворительный, но весьма непростой ответ. В учебной литературе в качестве определения оно, по-видимому, не использовалось. В отличие от классического, это определение не приспособлено для решения задач комбинаторного характера. Поэтому в учебниках наряду со статистическим приходится приводить еще и классическое определение вероятности. Поскольку связь между этими определениями далеко не очевидна, это вносит путаницу.

Наконец, третье, аксиоматическое определение вероятности события, предложенное А.Н. Колмогоровым, уже не один десяток лет лежит в основе вузовских курсов теории вероятностей. Не пренебрегая накопленным высшей школой опытом, отметим, что в общем виде это определение слишком сложно да и неуместно в обязательных курсах основной и старшей школы, что не исключает элективных курсов по колмогоровской аксиоматике. Достаточно ограничиться конечными вероятностными пространствами, то есть конечными множествами элементарных событий, что существенно упрощает и не искажает сути колмогоровского определения. Такой подход кратко изложен во вводной главе экспериментального учебника [4] для старшей школы. На наш взгляд, он является лучшим и для основной школы. Наметим один из возможных вариантов его реализации.

В случае конечного вероятностного пространства, который вполне достаточен для решения большинства школьных задач, теория вероятности исходит из одного понятия — понятия множества элементарных событий, двух аксиом — позитивности и нормированности вероятности, и двух определений — определений случайного события и его вероятности.

Обсуждая случайный эксперимент (опыт), прежде всего надо указать множество всех его элементарных событий (элементарных исходов), то есть совокупность всех исходов, которыми может заканчиваться случайный эксперимент [4].

Пример 1. В опыте с однократным бросанием монеты элементарными событиями можно считать выпадения орла (О) или решки (Р).

Пример 2. В случайном эксперименте с бросанием игральной кости элементарными событиями можно считать числа, выпадающие на верхней грани кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Пример 3. Если в опыте монета подбрасывается дважды, то элементарными событиями в этом опыте естественно считать четыре возможные пары: (О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р).

Пример 4. В эксперименте, когда бросают две игральные кости, элементарными событиями можно считать пары натуральных чисел от 1 до 6. Всего таких событий 36 (их удобно записывать в виде таблицы).

Для математического описания приведенных выше экспериментов в теории вероятностей используют такое понятие, как пространство элементарных событий. Это понятие описывается следующими четырьмя определениями.

Определение 1. Имеется произвольное конечное множество $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$. Элементы ω_i этого множества называются *элементарными случайными событиями*, а само множество — *множеством элементарных* (*случайных*) *событий*.

Как видно из приведенного формального определения, современная теория вероятностей никакой содержательной характеристики понятию элементарного случайного события не дает; это лишь некий объект, которому в дальнейшем можно будет приписать ту или иную вероятность. Такой подход имеет свои достоинства и недостатки. В числе первых отметим общность, не ограничивающую применение вероятностных моделей. В числе последних — неопределенность, которая может привести к неадекватным моделям.

На множестве элементарных событий можно задать вероятность. При этом должны соблюдаться всего два условия:

1) вероятность элементарного события — неотрицательное число;

2) сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1.

Приведем формальное (аксиоматическое) определение вероятности.

Определение 2. Пусть имеется множество элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ и пусть каждому элементарному событию $\omega_i \in \Omega$ поставлено в соответствие произвольное неотрицательное число $P(\omega_i)$ так, что справедливо равенство $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$. В этом случае говорят, что на множестве элементарных событий Ω задана *вероятность* P, а число $P(\omega_i)$ называют *вероятностью элементарного события* ω_i.

Значения вероятностей могут быть какими угодно, лишь бы соблюдались два указанных правила. Важно понимать, что задание вероятностей элементарных событий не входит в задачи теории вероятностей. Этот раздел математики исходит из того, что уже имеется множество элементарных событий с заданной на нем вероятностью. После чего с использованием математического аппарата при тех или иных дополнительных предположениях выводятся следствия, то есть теоремы теории вероятностей.

Как же назначаются вероятности элементарных событий на практике, скажем, в приведенных выше примерах 1–4? Любое практическое применение (приложение) математики обязательно начинается с разработки или подбора соответствующей математической модели. Разработка такой модели опирается на содержательные, выходящие за рамки математики соображения, учитывающие природу и специфику моделируемого случайного опыта.

Так, в рассмотренных выше примерах можно допустить, что соответствующие элементарные события равновероятны, то есть вероятность каждого элементарного события примера 1 равна $\frac{1}{2}$, 2 — $\frac{1}{6}$, 3 — $\frac{1}{4}$, примера 4 — $\frac{1}{36}$.

Естественно спросить: нельзя ли, имея результаты многократно повторенного случайного опыта, оценить вероятность того или иного события? Можно, но эта задача другого, тесно связанного с теорией вероятностей раздела математики — математической статистики.

Нас может интересовать не появление в результате случайного эксперимента в примере 2 конкретного числа на грани кубика, а появление четного числа (нечетного числа, числа, не превышающего 4, и т.п.). Таким образом, объединяя элементарные события по тем или иным признакам, мы приходим к понятию случайного события. Эти соображения приводят к следующему определению.

Определение 3. Любое подмножество A множества элементарных событий Ω называется (*случайным*) *событием*.

Пример 5. В опыте с бросанием одной игральной кости можно рассмотреть событие A — «выпало четное количество очков». Формально можно записать A как множество всех элементарных событий, которые составляют это событие: $A = \{2; 4; 6\}$.

Пример 6. В опыте с бросанием двух игральных костей можно рассмотреть событие B — выпала хотя бы одна «шестерка». Тогда событие B содержит 11 элементарных событий: $B = \{(1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6), (6; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3),(6; 4), (6; 5)\}$.

Как же находить вероятность произвольного события, имея вероятности элементарных событий? Следующее определение дает естественный ответ на этот вопрос.

Определение 4. Вероятность произвольного случайного события равна сумме вероятностей составляющих его (принадлежащих ему) элементарных событий.

Так, в примерах 5 и 6 при предположении равновероятности соответствующих элементарных событий получим

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{11}{36}.$$

Сделаем два замечания по поводу принятых определений.

Во-первых, в большинстве школьных задач речь идет исключительно о равновероятных элементарных событиях, то есть

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n},$$

поэтому целесообразно сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема. В случае равновероятных элементарных событий вероятность произвольного события A равна отношению числа $n(A)$ элементарных событий, входящих в событие (благоприятствующих событию) A, к общему числу n элементарных событий:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из определений. Действительно, в силу условия, имеем:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n},$$

откуда, в силу определения 4, получаем

$$P(A) = \frac{n(A)}{n},$$

где $n(A)$ — число элементарных событий, составляющих событие A. Теорема доказана.

Таким образом, классическое определение вероятности превратилось в простую теорему.

Во-вторых, важно с самого начала четко отделять математику от приложений [3], то есть отделять содержательные понятия приложений от их абстрактных математических «двойников», что предполагает использование знакомого учащимся понятия «математическая модель».

Эта потребность возникает в силу специфики теории вероятностей, что особенно проявляется в задачах. Проведем параллель с геометрией. Подавляющее большинство задач школьных учебников геометрии имеют абстрактные формулировки: «в треугольнике и т.д.», и не требуют для решения построения математической модели. Модели же для практических геометрических задач настолько ясны, что их опускают, неявно подразумевая. Например, факт, что отрезок является абстрактным «двойником» туго натянутой веревки или шеста, очевиден даже для пятиклассника.

С теорией вероятностей дело обстоит иначе. В большинстве задач из школьных учебников речь идет о реальном или мыслимом эксперименте (бросание кубика, случайный выбор и т.п.). И решение такой задачи должно включать далеко не очевидный этап формализации, то есть построения математической модели. Корректное построение модели значительно удлинит как формулировку, так и решение задачи. Поэтому целесообразно обозначить присутствие модели одной-двумя фразами, например, как это сделано в следующих двух задачах.

Задача 1. Какова вероятность выпадения хотя бы одной «шестерки» при однократном бросании двух игральных костей?

Решение. Условие задачи предполагает, что все 36 элементарных событий (пример 4) описанного опыта равновероятны, следовательно, вероятность каждого из них равна $\frac{1}{36}$. Интересующее нас событие B содержит 11 элементарных событий (пример 6). Тогда, в силу определений, его вероятность равна $\frac{11}{36}$.

При решении задачи вместо непосредственных ссылок на определения можно воспользоваться приведенной выше теоремой: число благоприятствующих событию B равновероятных исходов — 11, общее число исходов эксперимента — 36, следовательно, в силу теоремы, $P(B)=\frac{11}{36}$.

Задача 2. В зале торгового комплекса установлены два различных кофемата, обслуживаемых разными организациями. Вероятность того, что работает первый кофемат, равна 0,7. Вероятность того, что работает второй кофемат, равна 0,6. Найдите вероятность того, что работает хотя бы один кофемат.

Решение. При решении задачи необязательно моделировать множество элементарных событий. Можно рассуждать следующим образом. Обозначим через A событие «не работает первый кофемат», а через B — «не работает второй кофемат». Очевидно,

$P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$,

$P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Так как кофематы различны и обслуживаются разными организациями, то события A и B можно считать независимыми. Следовательно,

$$P(A \cup B) = P(A)P(B) = 0{,}12,$$

где событие $A \cup B$ означает, что не работают оба кофемата. Очевидно, искомая вероятность равна

$$1 - P(A \cup B) = 0{,}88.$$

Преимущество аксиоматического подхода состоит еще и в том, что он четко выделяет в решении прикладных задач по теории вероятностей две части:

– выбор математической модели явления или эксперимента;

– вычисления в рамках математической модели.

Это вполне согласуется с ориентирами, заложенными в «Концепции развития математического образования» [6], а именно с положением, указывающим в числе главных образовательных результатов освоения математики и информатики «формирование способности к созданию математической модели реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, определения или предсказания их свойств».

Литература

1. *Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики // Математика в школе, 2014, № 5. **2.** *Колмогоров А.Н.* и др. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982. **3.** *Покровский В.Г.* О преподавании основ теории вероятностей в школе// Математика. Все для учителя. Научно методический журнал, 2014, № 9 [45]. **4.** *Тюрин Ю.Н.* и др. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: МЦНМО, 2014. **5.** *Тюрин Ю.Н.* и др. Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя. — 4-е изд. стереотип. — М.: МЦНМО; МИОО, 2014. **6.** Концепция развития математического образования в РФ // Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р.