Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя / Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко. – 2-е изд., исправленное и дополненное – М: МЦНМО: МИОО, 2008.

7. *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Основы статистики и вероятность. 5–11 кл.: учебное пособие – М.: Дрофа, 2008.

8. *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Вероятность и статистика. 5–9 кл. Электронное учебное пособие. – М.: Дрофа, 2007.

9. *Дорофеев Г.В.* Математика 5–9. учебное пособие / Е.А.Бунимович, В.А.Булычев. Просвещение. – 2009.

10. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г.* Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. Пособие для учащихся 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк; под ред. С.А.Теляковского. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2005.

11. *Ткачева М.В., Федорова Н.Е.* Элементы статистики и вероятность: Учеб. Пособие для 7–9 кл. общеобразоват. Учреждений / М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова. – М. Просвещение, 2004.

12. *Бродский И.Л., Литвиненко Р.А.* Вероятность и статистика 7–9 классы. Решение задач из учебников под ред. Г.В.Дорофеева. – М.: АРКТИ, 2006.

Е.А.Бунимович, Ю.Н.Тюрин, П.В.Семенов, В.А.Булычев, А.А.Макаров, А.Г.Мордкович, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко

ПРЕПОДАВАНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ В ШКОЛЕ

ПО УЧЕБНОМУ ПОСОБИЮ Ю.Н.ТЮРИНА, А.А.МАКАРОВА И ДР. «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА»

Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко
(Москва)

Назначение и место статистики и теории вероятностей в школе

В содержание среднего образования в России недавно внесены существенные изменения. В образовательный стандарт и школьную программу по математике (7–9 и 10–11 классы) включены элементы теории вероятностей и статистики. На наш взгляд значение этого события выходит далеко за рамки простого совершенствования школьной программы по математике. Оно требует общего обсуждения преподавания этих разделов в школе.

Заметим, что до сих пор в школьном курсе математики и других естественных наук в России господствовала только одна идея – о существовании жестких связей между явлениями и событиями. Эти связи представлены в форме формул, выражающих законы физики и химии; даже в курсе истории нет места случайности: он построен так, что складывается впечатление, что все события предопределены и закономерны. Такое представление природы и мира, в котором не упоминается о роли случайного, на наш взгляд, односторонне как идейно, так и технически. Оно не согласуется с современным мировоззрением, осложняет ориентацию в изменчивом информационном мире, не способствует формированию квалифицированной рабочей силы. В частности, непонимание населением статистических данных и статистических методов может вносить недоверие в отношения между гражданами и государством. Поэтому, на наш взгляд, внедрение в школьное обучение статистики и теории вероятностей имеет очень важное значение. Одновременно оно требует ясной продуманной методики, без которой будет обречено на неудачу.

Принятию в 2004 г. решения о включении в образовательный стандарт статистики и теории вероятностей предшествовало почти десятилетние обсуждение в педагогической среде. К моменту первого издания в 2004 г. нашего учебника [1] элементы теории вероятностей и статистики в разрозненном виде уже более десяти лет присутствовали в известных учебниках математики и алгебры для разных классов [2–6]. Однако их изложение, как правило, не носило систематического и целостного характера. Учителя не всегда обращались к этим темам в учебниках и не включали их в учебный план, так как дисциплина не была включена в государственный стандарт. Теперь это произошло. Из факультативной формы преподавания теория вероятностей перешла в основную. В последние пять лет появился ряд отдельных учебных пособий [1, 7–10], посвященных изложению статистики и теории вероятностей в школе. К делу они подходят по-разному, изложенный в них материал тоже различен, и эти учебники по-разному расставляют акценты. Обсуждение этого вопроса тем более актуально, что в высшей школе, в том числе в педагогических вузах, преподавание этих дисциплин вызывает много вопросов и нареканий, а уровень усвоения материала невысок. Поэтому учителям порой бывает довольно трудно разобраться в том материале, который им предстоит объяснять учащимся.

Кратко перечислим типичные, на наш взгляд, недостатки, которыми страдают в той или иной мере курсы теории вероятностей и соответствующие им пособия в высшей школе.

1. Обособление теории вероятностей от идей и подходов математической статистики. Это приводит к отрыву теории вероятностей от практики, зачастую превращая ее в абстрактную науку.

2. Чрезмерное увлечение классической схемой теории вероятностей и комбинаторными методами. Это резко сужает круг рассматриваемых вероятностных задач, отрывает теорию вероятностей от практических приложений и не способствует усвоению собственно вероятностных понятий. В высшей школе это сокращает время на изучение непрерывных случайных величин и предельных теорем теории вероятностей.

3. Неоправданно высокий математический формализм, затрудняющий восприятие сути даже таких простых понятий как случайная величина и ее числовые характеристики.

4. Подмена теории вероятностей другими разделами математики: комбинаторикой, теорией меры, функциональным анализом и разбором различных математических тонкостей.

5. Изложение теории вероятностей на большом количестве исторически известных задач, в свое время внесших вклад в ее становление и развитие, но в настоящее время утративших свою актуальность (задача о разделении ставки, многие другие задачи, возникшие из интереса к азартным играм, часть задач на геометрическую вероятность и т.п.).

6. Привлечение для разбора материала разного рода парадоксов и задач с нечетко сформулированными условиями.

7. Не слишком корректное упрощение теории вероятностей.

Ряд замечаний можно высказать и по курсам математической статистики, которые часто концентрируются только на рассмотрении гауссовской теории или узких приложений, важных в той или иной предметной области. Однако эти замечания менее существенны по отношению к рассматриваемому вопросу.

Мы обратили внимание на указанные недостатки, потому что некоторые материалы по теории вероятностей, попадающие в школьные учебники, автоматически заимствуют не самый удачный опыт высшей школы. Нам кажется, что прямой перенос подобного неблагополучного опыта преподавания теории вероятностей и статистики из высшей школы в среднюю приведет к отрицательным результатам и опять на долгие годы или десятилетия отложит столь необходимое утверждение этих наук в школьном курсе математики.

Говоря о преподавании статистики и теории вероятностей в основной школе (7–9 классы), приходится учитывать тот общий уровень математической культуры, который сформирован к этому времени у школьников и то, насколько они готовы к восприятию новых понятий в абстрактной форме. Однако, на наш взгляд, это не является препятствием к изучению статистики и теории вероятностей, а лишь накладывает довольно жесткие требования на форму преподнесения материала. Одной из главных задач, на наш взгляд должно быть формирование общих представлений о случайной изменчивости, о случайности, вероятности, об их месте в окружающем мире, а не закрепление навыков манипулирования с числами, формулами и понятиями. (Последнее в достаточном, если не избыточном, объеме присутствует в школьном курсе алгебры.)

Здесь уместно привести аналогию с преподаванием геометрии, которое в систематическом виде начинается в 7 классе. Однако к этому моменту школьники уже имеют богатый опыт работы с простейшими геометрическими фигурами. С младенческого возраста, играя с пирамидками и кубиками, раскрашивая картинки и вырезая из бумаги фигурки, ребенок создает свои первые геометрические образы. Окружающие его предметы мебели и быта позволяют успешно формировать представления о квадрате (стол), круге (тарелка), прямой и кривой линии, плоскости, о количестве, размере, длине и площади. Впоследствии малыш знакомится с наложением, симметрией, поворотом – опять же в игре. Не зная никаких специальных слов или обозначений, ребенок рисует красивую бабочку или вырезает бумажную снежинку из сложенного листа бумаги, строит домики из пластмассовых кирпичиков.

Систематическое школьное изучение геометрии на первых порах призвано формализовать уже имеющиеся наглядные образы и представления в виде определений, утверждений или формул. Если ребенок лишен игрового геометрического опыта, то обучение геометрии терпит фиаско, поскольку нет тех образов, которые нужно формализовать.

То же происходит в алгебре. Она формализует интуитивные представления о числе, соотношениях между разными числами, известных и неизвестных величинах.

Такая же ситуация и с вероятностью: если у ребенка не создать первичные наглядные представления о случайности и изменчивости, то невозможно в дальнейшем их формализовать в ходе изучения теории вероятностей – она останется в памяти как набор непонятных, ни о чем не говорящих символов.

Учитывая опыт преподавания в Высшей школе и опыт школьных учителей, мы старались руководствоваться следующими положениями при разработке общего подхода к преподаванию статистики и теории вероятностей в школе.

1. Дать целостное, законченное, разумеется на начальном уровне, представление о теории вероятностей и статистике и их тесной взаимосвязи.

2. Подчеркнуть тесную связь этих разделов математики с окружающим миром, как

на этапе введения математических понятий, так и в ходе использования полученных результатов.

3. Избегать математического формализма там, где это только возможно.

4. Избегать классических примеров и задач, утративших актуальность для общества, в том числе задач, родившихся из азартных игр.

5. Сопровождать рассказ яркими, доступными и запоминающимися примерами для формирования интереса учащихся и лучшего усвоения материала.

Эти принципы нашли свое отражение в нашем учебном пособии «Теория вероятностей и статистика» [1] и его втором, переработанном издании [10], подготовленном авторами в тесном контакте с ведущими школьными методистами и учителями г. Москвы. Раскрывая суть сформулированных выше подходов, остановимся подробнее на содержании этого пособия.

Отдельно следует сказать еще об одном аспекте изучения вероятности и статистики в школе. Не секрет, что многие учащиеся так и не усваивают на уроках математики приемы вычисления с процентами и долями. Опыт последних работ показывает, что среди старшеклассников около 20% практически не выполняют действия с процентами, не понимая их смысла.

Уроки по вероятности и статистике в седьмом или восьмом классе дают возможность учителю вернуться к изучению важных объектов – процентов и долей. Ведь что есть вероятность как не доля достоверности? Причем вернуться не на формальном материале учебника математики, а содержательно. Точно так же, уроки статистики позволяют предметно и понятно иллюстрировать смысл функциональной зависимости, смысл возрастания, убывания, идею линейной связи. Тогда регулярное изучение свойств функций в 7 и 8 классе превращается в изучение моделей, смысл которых уже известен и понятен благодаря урокам статистики.

В заключение заметим, что уроки статистики и вероятности предоставляют учителю широкие возможности использования коллективной работы в группах. Ведь любой статистический или вероятностный эксперимент (будь то бросание монет или сбор сведений) не под силу провести в одиночку. Требуется «рабочая группа». Опыт московских учителей показывает, что школьники обычно с удовольствием и интересом выполняют практические работы, связанные с опросами, систематизацией и обработкой полученных данных с помощью компьютера. Не меньший интерес вызывают вероятностные эксперименты.

Краткое описание материала первого года обучения

На наш взгляд, изучение элементов теории вероятностей и статистики в школе должно начинаться с изучения статистики в 7 классе (см. примерное почасовое планирование в конце статьи или в [11]). На большом количестве различных примеров, на разборе различных (табличных и графических) способов представления и описания данных постепенно вводится и закрепляется одна из главных идей теории вероятностей и статистики – идея случайной изменчивости. Для показа и разъяснения случайной изменчивости мы привлекали самые различные источники: от государственной статистики до повседневной жизни учащихся, их биометрических данных, школьных оценок, показателей физического развития и т.п. При этом учащимся предлагается ряд практических заданий по сбору и обсуждению данных окружающего их мира. Все это необходимо для того, чтобы сформировать те самые первичные наглядные представления, без которых дальнейшее регулярное изучение теории вероятностей будет затруднено.

Одновременно с идеей случайной изменчивости вводятся простейшие показатели, описывающие изменчивость в целом: среднее арифметическое, медиана, отклонение от среднего, дисперсия числовых наборов. При изложении этого материала в седьмом классе следует избегать формализма, не использовать переменных с индексами, формальных определений и доказательств. Формализованные обозначения и простейшие свойства среднего и дисперсии вынесены в отдельные параграфы в качестве дополнительного материала, предназначенного для наиболее подготовленных школьников. В то же время важно на примерах, которых в пособии достаточно, показать, как может вести себя среднее арифметическое для различных наборов чисел, пояснить, когда оно дает хорошее представление о наблюдаемой величине, а когда нет. Для иллюстрации поведения среднего арифметического целесообразно привлекать графические методы, показывать числа и их среднее на числовой прямой Аналогичный подход мы используем при изучении медианы, наибольшего и наименьшего значения, размаха и дисперсии числового набора. Важно, чтобы у учащихся формировалось понимание того, что в зависимости от постановки задачи для описания набора чисел можно и нужно использовать разные показатели, а не только среднее арифметическое.

К теме среднего значения и дисперсии набора чисел мы обращаемся еще раз, когда обсуждаем числовые характеристики дискретной случайной величины – ее математическое ожидание и дисперсию. Это уже материал 9 или 10–11 классов. Здесь проявляется связь между теоретическими и выборочными характеристиками случайной величины. Другими словами, описанные вначале, почти наглядные числовые характеристики, получают вторую математическую трактовку при изучении случайных величин.

Знакомство с элементами теории вероятностей начинается в 7 классе с изложения на интуитивном уровне понятий случайного эксперимента, случайного события и его вероятности. На этом этапе мы не привлекаем для изложения комбинаторику, как это принято делать в так называемой схеме «классической теории вероятностей». Последнее, на наш взгляд, нужно только для полной общности изложения, когда есть необходимость перечислять элементы обширных множеств. При работе со школьниками достаточно простых примеров, в которых число возможных событий невелико. В этих условиях комбинаторное изложение становится ненужной данью истории, резко сужает круг задач и вопросов, доступных для рассмотрения. На начальном этапе комбинаторика отрывает базовые понятия теории вероятностей от их сути и от практики. Учащиеся должны знать и понимать, что основным способом определения вероятности события в содержательных примерах на практике является частотный подход, но что порой определение вероятности события – это сложная или вовсе неразрешимая задача.

Далее, переходя к математическому описанию случайных явлений, мы обращаем особое внимание на понятие случайного опыта и на его важность для всей последующей математической формализации случайности. Описание случайного опыта подводит нас к выбору подходящего набора (пространства) элементарных событий и возможному способу задания на нем вероятностей элементарных событий. Эта мысль важна еще и потому, что говоря о вероятности случайных событий на бытовом уровне, чаще всего забывают уточнить те условия, в которых обсуждаются эти события. Аналогичная ситуация часто наблюдается и во многих внешне простых формулировках занимательных вероятностных задач, где четко не говорится о том, что в них следует понимать под случайным опытом. В истории это не раз приводило к длительным спорам и математическим парадоксам. Такого рода задачи, как показывает практика обучения, отвлекают и путают учащихся, порождают в них неуверенность в собственных силах и сомнения в применимости вероятностных моделей вообще.

Надо понимать, что одному и тому же физическому опыту, превращая его в математический случайный эксперимент, можно приписать различные исходы и их вероятности. Эти различные множества исходов (элементарных событий) порождают различные случайные эксперименты. Распределения вероятностей между элементарными исходами в них естественно, будут различными. Важно при этом одно – правильное, то есть согласованное с опытом введение вероятностей.

Для пояснения сказанного рассмотрим простой пример: опыт с последовательным подбрасыванием двух правильных монет. (Правильная математическая монета – это монета, которая с равными вероятностями падает кверху орлом или решкой.) Естественное множество элементарных событий в этом случайном эксперименте здесь состоит из четырех событий: ОО (орел выпал при первом бросании, орел выпал при втором бросании), ОР (орел при первом бросании, решка при втором), РО и РР. Естественно счесть все эти четыре элементарных исхода равновозможными и приписать им одинаковые вероятности $\frac{1}{4}$. Эти вероятности согласуются с наблюдающимися частотами исходов при бросании настоящих монет.

Но если в этом опыте нас интересует лишь число выпавших орлов, то можно ввести и иное множество исходов: 0 (ноль орлов), 1 (один орел), 2 (два орла). Правильные (согласованные с частотами в реальном эксперименте) вероятности этих элементарных исходов 0, 1, 2 есть $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Но такое назначение вероятностей далеко не очевидно. Относительно недавняя история знает ошибку, совершенную в похожей ситуации: французский математик и энциклопедист Даламбер, говоря о семьях с двумя детьми, полагал (и писал в своей энциклопедии), что с равными вероятностями $\frac{1}{3}$ в таких семьях а) может не быть ни одного мальчика; б) может быть только один мальчик, и в) может быть два мальчика. Эта ошибка основана на ложно примененной идее равновозможности.

Идея равновозможности занимает важное место в школьном курсе элементов теории вероятностей. Исторически понятие «равновозможность» начало формироваться при решении задач, связанных с азартными играми. Однако оно не утратило своей актуальности и в настоящее время. Именно оно лежит в основе простого случайного выбора, на котором базируются все методики организации выборочных исследований, контроля качества продукции и социологических опросов. Однако было бы совершенно неверно с методической точки зрения ограничиваться в школьном курсе обсуждением только тех случайных опытов, элементарные события в которых равновозможны. Это часто приводит к формированию у учащихся устойчивого ложного представления, что интересующее его событие всегда имеет вероятность, равную одной второй, так как это событие «либо произойдет, либо нет». Поэтому в учебном пособии особо подчеркивается, что на практике многие элементарные события не равновозможны.

Учитывая все сказанное, на наш взгляд, на этапе первого знакомства с основными вероятностными понятиями следует всячески избегать нечетких формулировок в вероятностных задачах. Надо, чтобы условия случайного опыта формулировались ясно и недвусмысленно.

Комбинаторика в школьной теории вероятностей

Взгляд авторов на значение равновозможных и неравновозможных элементарных событий отчасти накладывает свой отпечаток на определение роли комбинаторики в курсе теории вероятностей. По нашему мнению, введение элементов комбинаторики должно быть подчинено вероятностным задачам, а не наоборот. Важно научить учащихся разумному перебору и перечислению различных комбинаций, а не формальным преобразованиям выражений, включающих число сочетаний, перестановок и т.п. и доказательствам комбинаторных теорем. Важно показать, что без использования комбинаторных подходов во многих вероятностных задачах трудно описать все элементарные события. Важно дать наглядное, запоминающееся представление о тех практических ситуациях, где используются комбинаторные принципы подсчета. На наш взгляд, активное привлечение к изложению комбинаторного материала традиционной «схемы урн, с различающимися или не различающимися шарами разного цвета», преждевременно. Вводить комбинаторный материал следует не ранее 8 класса, а его более углубленное изучение, включая бином Ньютона, проводить в конце 9 или 10–11 классах после знакомства со схемой испытаний Бернулли.

Тема перехода от элементарных событий к произвольным событиям и операциям с ними изложены нами без привлечения понятия множества. Это сделано для того, чтобы не усложнять восприятие материала учащимися. Мы надеемся, что для части учителей это облегчит процесс преподавания. Не совершат ошибки те учителя, кто сочтет возможным и полезным привлечение в эти темы теоретико-множественных аналогий, говоря, что событие является множеством, включающим благоприятствующие ему элементарные события, а операции над событиями суть операции над множествами. В любом из этих подходов очень наглядны и полезны диаграммы Эйлера (их еще называют диаграммами Венна), показывающие, как соотносятся друг с другом различные события внутри одного эксперимента.

Испытания Бернулли

Материал 8 класса завершает изучение последовательности независимых испытаний Бернулли.

Схема испытаний Бернулли является не только простой, полезной и распространенной на практике моделью описания однотипных повторяющихся независимых опытов с двумя возможными исходами. Она играет в теории вероятностей важную методическую роль, показывая как получить примерное представление о вероятности многих интересующих нас событий. Об этом сначала говорится в пособии на интуитивном уровне при обсуждении соотношения вероятности и частоты событий в 7 классе. В более полном объеме эта тема затем обсуждается в пункте «Измерения вероятностей» в заключительной главе пособия «Случайные величины в статистике». Последний материал требует определенной подготовки учащихся и изучения глав, посвященных случайным величинам. Если учитель не сочтет возможным касаться всех этих вопросов в основном курсе, а остановится только на самой схеме Бернулли, то он должен хорошо понимать, что здесь им закладывается методическая основа для более глубокого знакомства учащихся с теорией вероятностей. Сама по себе схема испытаний Бернулли объединяет целый ряд понятий и методов, изученных ранее. Это представления о множество всех элементарных событий, понятие независимости событий, правило умножения вероятностей, представление о числе сочетаний. То есть эта важная тема дает возможность повторить и закрепить многое из уже пройденного материала.

Геометрическая вероятность

Тема «геометрическая вероятность», входящая в общеобразовательный стандарт, на взгляд авторов, в большой степени является данью исторической традиции изучения вероятностей в высшей школе. В рассказе о геометрических вероятностях много подводных камней и трудностей, которые надо обходить. Содержательное математическое обсуждение этих трудностей на школьном уровне нецелесообразно и практически невозможно. Эти соображения были положены нами в основу изложения материала по этой теме. Но все же, при работе с этим материалом учитель и учащиеся получают возможность повторить материал курса геометрии и укрепить навыки формализации текстовых вероятностных задач, используя различные геометрические объекты.

Случайные величины

Главы пособия «Случайные величины» и «Числовые характеристики случайных величин» в определенной степени избыточны и могут не включаться учителем в курс математики основной школы или даваться обзорно. Однако именно этот материал, включая закон больших чисел, устанавливает связь между понятиями теории вероятностей и статистики. Если этот материал не включается в программу базовой школы, то мы рекомендуем его для работы в 10–11 классе. Отметим, что первое неявное представление о случайных величинах дается нами при изучении элементов статистики. В указанных выше главах оно формализуется для дискретных случайных величин. Вводятся понятия распределения случайной величины и его числовых характеристик – математического ожидания и дисперсии. Одной из важнейших случайных величин, которую следует рассматривать в этом разделе, служит число успехов в серии испытаний Бернулли. Вычисление математического ожидания и дисперсии для числа успехов дают нам возможность сформулировать один из основных законов теории вероятностей – закон больших чисел. Он важен не только с точки зрения математики, но несет еще и большую мировоззренческую нагрузку, показывая, что усреднение случайных величин позволяет нам получить более точное представление об окружающем мире. На бытовом уровне одной из иллюстраций закона больших чисел служит поговорка: семь раз отмерь – один отрежь! Заметим, что неявное обсуждение закона больших чисел мы начинаем при разборе ряда статистических задач в седьмом классе, обсуждая случайную изменчивость различных величин. Уже там мы обращаем внимание на то, что средние значения однотипных наборов различных случайных величин заметно меньше отличаются друг от друга, чем сами случайные величины в наборах. Другими словами, закон больших чисел показывает наличие закономерности в случайном, устанавливает связь между ними.

Бином Ньютона и треугольник Паскаля

Две важные темы «Бином Ньютона» и «Треугольник Паскаля» вынесены нами в приложение. Это сделано по нескольким причинам. Во-первых, эти темы не имеют непосредственного отношения к курсу теории вероятностей и статистики. Во-вторых, они опираются на более высокий уровень формализма в записи выражений, чем в целом принят в нашем учебном пособии. На наш взгляд, обращаться к этим темам стоит лишь после того, когда в целом завершено прохождение материала по статистике и теории вероятностей. В этом случае появляется возможность показать, как содержательно используется этот материал в теории вероятностей.

Тем не менее, треугольник Паскаля можно использовать для получения числа сочетаний при изучении элементов комбинаторики ранее 9 класса. Особенно это удобно, если учитель не считает возможным при работе со школьниками использовать формулы для вычисления C_n^k. В этом случае треугольник Паскаля выступает просто в качестве таблицы, из которой можно брать числа. Для удобства треугольник Паскаля вынесен на задний форзац учебника.

Отдельно обратим внимание на ряд методических приемов, использованных в учебном пособии и играющих важную роль в преподнесении всего материала.

1. Наглядность и простота изложения.
2. Минимальный математический формализм в записи выражений и определениях.
3. Подчеркивание связи вводимых понятий с реальной практикой.
4. Использование сквозных примеров и задач при обсуждении разных тем.
5. Подчеркнутая ясность и простота формулировок большинства задач.
6. Выделение более сложных задач и размещение их в конце обсуждаемой темы.
7. Отсутствие однозначного ответа в некоторых задачах и вопросах. В основном, эти задачи предполагают обсуждение в классе, и требуют от учащихся разумного обоснования своего мнения.
8. Подбор примеров и задач с учетом различных интересов и возрастных особенностей развития учащихся.
9. Проведение небольших практических исследований (измерений) и экспериментов (случайных опытов) для лучшего понимания природы случайной изменчивости и смысла вероятности.
10. Возможность повторения и закрепления на новом материале пройденного ранее.

На наш взгляд все это должно способствовать усвоению в целом простых, но принципиально новых для учащихся понятий из статистики и теории вероятностей, росту интереса учащихся к математике в целом и формированию современного мировоззрения, умения ориентироваться в изменчивом мире.

Интеграция курса теории вероятностей и информатики

Отдельно скажем об опыте поддержки изучения статистики и теории вероятностей специальными задачами и упражнениями в курсе информатики. Такой опыт накоплен во многих московских школах, где учителя математики работают в содружестве с учителями информатики или сами ведут занятия с использованием компьютера.

В первую очередь следует сказать о том, что большинство тем статистики 7 класса может поддерживаться компьютерными практикумами.

Там, где речь идет о вычислении характеристик числовых наборов – среднего, медианы, размаха и дисперсии, использовать реальные числовые данные невозможно в рамках уроков математики. Во-первых, эти данные слишком многочисленны в любой сколько-нибудь содержательной задаче. Поэтому учащиеся просто не в состоянии выполнить их обработку вручную. Да и цели такой нет – мы же не хотим превращать уроки статистики в бесконечные арифметические упражнения. Во-вторых, эти данные не адаптированы (любая адаптация тут же превращает жизненные данные в неправдоподобные). А производить вычисления на уроках или даже в домашнем задании с неадаптированными числами крайне затруднительно. Поэтому учебное пособие содержит упрощенные вычислительные примеры, цель которых – только иллюстрировать методы, а вовсе не практиковаться в громоздких вычислениях.

Иное дело, когда в руках у учащегося есть компьютер. Простейший табличный процессор Excel позволяет провести все необходимые вычисления в доли секунды, независимо от объема имеющихся данных.

Таким образом, учитель получает возможность использовать настоящие жизненные примеры числовых данных на уроках, что определенным образом влияет на заинтересованность школьников. Польза от симбиоза статистики и информатики в школе взаимная: учитель информатики получает массу содержательных примеров, с помощью которых он обучает школьников использованию богатых возможностей Excel. Вместо бессмысленных модельных табличек школьники выполняют вполне осмысленные и интересные расчеты, связанные с обработкой различных данных, взятых непосредственно из жизни: численности туристов, посетителей магазинов, школ и детских садов, данных экологического мониторинга местности и т.п.

Большое число данных, которые можно использовать в уроках статистики с применением компьютера, можно найти в интернете. Сейчас уже возникла насущная необходимость в создании банков учебных числовых данных, которые можно было бы использовать в уроках статистики. Такие базы данных существуют за рубежом. Нам нужны свои.

Аналогичные практикумы возможны и в теории вероятностей. Более того, помимо практикумов, необходимо использовать компьютер для моделирования случайных процессов. Например, с помощью компьютера можно показывать на уроках математики, каким образом частота сближается с вероятностью при увеличении числа экспериментов. Еще ничего не зная о законе больших чисел, учитель при правильном применении компьютерного моделирования, может сформировать у учащихся верное представление о том, что частота события при большом числе экспериментов, скорее всего, близка к вероятности. Таким образом, довольно абстрактное понятие вероятности события получает наглядное содержание.

В планировании, что прилагается в конце статьи, приведен вариант, в котором выделены часы для компьютерных практикумов.

Естественнонаучный характер статистики и теории вероятностей в школе

Подводя итоги, заметим, что предложенный авторами подход к преподаванию элементов статистики и теории вероятностей в школе предполагает естественнонаучное изложение указанных дисциплин, подобное тому, что предполагается в курсах физики или химии. Наибольшую ценность представляют вводимые понятия, сложившаяся система взглядов, ее связь с окружающим миром. Другими словами, мы показываем, как и какими математическими понятиями и простейшими моделями описывается окружающий нас изменчивый мир. При таком подходе математические доказательства в начале обучения отступают на второй план. Таким образом, статистика и теория вероятностей, будучи частью школьной математики, не нагружены большим числом алгебраических преобразований, но наполнены простым материалом, очень важным с точки зрения формирования мировоззрения школьника. Этот же материал должен способствовать повышению интереса учащихся к математике.

Варианты почасового планирования

На протяжении пяти последних лет в школах Москвы постепенно внедрялся опыт преподавания статистики и теории вероятностей. Последние два года курс вероятности и статистики стал обязательным во всех московских 7 и 8 классах. В следующем 2009–2010 учебном году московские девятиклассники впервые будут сдавать итоговый экзамен по математике, в который будут включены задачи по вероятности.

Для того, чтобы учителя смогли вести

уроки по вероятности и статистике, в московском базисном учебном плане с 2007 г. в 7–9 классах предусмотрен один час в неделю.

Существует несколько вариантов планирования, рассчитанных на разные программы и разное число часов. Здесь мы предлагаем планирование, рассчитанное на 34 ч в течение учебного года.

Часть вариантов примерного планирования предусматривает проведение компьютерных практикумов в наиболее значимых темах статистики и теории вероятностей для тех учителей и учащихся, кто имеет возможность использовать компьютерные технологии на уроках.

Все предложенные варианты планирования покрывают требования, записанные в Государственном образовательном стандарте 2004 г.

Примерное планирование курса «Теория вероятностей и статистика» 7–9 классы (18 ч в год) по учебному пособию Ю.Н.Тюрина и др.

Темы курса	Примерное число часов	Главы пособия
7 класс		
Представление данных, таблицы, диаграммы	6	I–II
Описательная статистика	5	III
Случайная изменчивость.	3	IV
Введение в теорию вероятностей	4	V–VI
8 класс		
События и вероятности	6	VI–VII
Элементы комбинаторики	6	VIII
Испытания Бернулли	6	X
9 класс		
Геометрическая вероятность	2	IX
Случайные величины	5	XI–XII
Закон больших чисел	2	XIII
Бином Ньютона, треугольник Паскаля	5	Приложение
Итоговое повторение, резерв	**4**	
Всего	**54**	

Следующие варианты планирования рассчитаны на 34–36 ч в год (1 час в неделю).

Примерное почасовое планирование курса «Теория вероятностей и статистика» для 7 классов (34 ч). Без компьютерной поддержки практических работ

Темы курса	Примерное число часов	Пункты пособия
Глава I. Таблицы	**6**	
Статистические данные в таблицах.	1	1

Поиск информации в таблицах	1	2
Вычисления в таблицах	2	3, 4
Подсчеты и измерения с помощью таблиц.	2	5, 6
Глава II. Диаграммы	**6**	
Столбиковая диаграмма	1	7
Круговая диаграмма	2	8
Диаграмма рассеивания	2	9
Контрольная работа № 1	1	
Глава III. Описательная статистика	**11**	
Среднее значение числового набора	2	10
Медиана	2	1
Наибольшее и наименьшее значение. Размах	1	12
Отклонения, дисперсия	4	13, 14
Свойства среднего арифметического и дисперсии* (или резерв)	1	15*, 16*
Контрольная работа № 2	1	
Глава IV. Случайная изменчивость	**3**	
Примеры случайной изменчивости	1	17
Рост человека	1	18
Точность измерений	1	19
Глава V. Случайные события и вероятность	**4**	
Случайные события	1	20
Вероятности и частоты	1	21
Классические модели в теории вероятностей	1	22
Как узнать и зачем нужно знать вероятность события?	1	23,24
Итоговое повторение материала	**4**	
Всего	**34**	

Примерное почасовое планирование курса «Теория вероятностей и статистика» для 8 классов (34 часа). Без компьютерной поддержки практических работ

Темы курса	Примерное число часов	Пункты пособия
Глава VI. Математическое описание случайных явлений	**8**	
Случайные опыты. Элементарные события. Равновозможные элементарные события.	1	25–27
Вероятности элементарных событий	1	28
Благоприятствующие элементарные события. Вероятности событий	2	29, 30

Опыты с равновозможными элементарными событиями . Решение задач	3	31
Контрольная работа №1	1	
Глава VII. Вероятности событий. Сложение и умножение вероятностей	**11**	
Противоположное событие. Диаграммы Эйлера	1	32
Объединение и пересечение событий	3	33, 34
Несовместные события. Правило сложения, формула сложения вероятностей	2	35,36
Случайный выбор. Независимые события. Умножение вероятностей	3	37,38
Контрольная работа № 2	1	
Глава VIII. Элементы комбинаторики	**6**	
Правило умножения. Перестановки. Факториал	1	39, 40
Задачи на вычисление вероятностей	1	41
Сочетания	1	42
Сочетания в задачах на вычисление вероятностей	3	43
Глава X. Испытания Бернулли	**7**	
Успех и неудача. Число успехов в испытаниях Бернулли	2	47,48
Вероятности событий в испытаниях Бернулли. Решение задач	4	49
Контрольная работа № 3	1	50
Итоговое повторение материала	**2**	

Примерное почасовое планирование курса «Теория вероятностей и статистика» для 9 классов (34 часа). Без компьютерной поддержки практических работ

Темы курса	Примерное число часов	Пункты пособия
Глава IX. Геометрическая вероятность	**3**	
Выбор точки из фигуры на плоскости и из числового отрезка	3	44, 45
Глава XI. Случайные величины	**7**	
Примеры случайных величин	1	50
Распределение вероятностей	3	51
Биномиальное распределение	2	52
Контрольная работа № 1	1	
Глава XII. Числовые характеристики случайных величин	**10**	
Математическое ожидание и свойства математического ожидания	2	53, 54

Рассеивание значений, дисперсия, стандартное отклонение	3	55, 56
Свойства дисперсии	2	57
Математические ожидания числа успехов в серии испытаний Бернулли	1	58
Дисперсия числа успехов	1	59
Контрольная работа № 2	1	
Глава X. Случайные величины в статистике	**4**	
Измерения вероятностей, точность приближения	2	60,61
Социологические обследования	1	62
Закон больших чисел	1	63
Приложение (резерв)[1]	**8**	
Число сочетаний	1	64
Формула бинома Ньютона	2	65
Свойства биномиальных коэффициентов	2	66
Треугольник Паскаля	2	67
Контрольная работа № 3	1	
Итоговое повторение материала	**2**	

Следующие варианты планирования предназначены для использования в том случае, когда есть возможность поддержки курса теории вероятностей компьютерными технологиями на уроках. Основная форма поддержки – практические расчетные работы.

Примерное почасовое планирование курса «Теория вероятностей и статистика» для 7 классов (34 ч). С компьютерной поддержкой практических работ

Темы курса	Примерное число часов	Пункты пособия
Глава I. Таблицы	**6**	
Статистические данные в таблицах.	1	1
Поиск информации в таблицах	1	2
Вычисления в таблицах	2	3, 4
Подсчеты и измерения с помощью таблиц.	1	5, 6
Практическая работа – вычисления в таблицах	1	4–6
Глава II. Диаграммы	**7**	
Столбиковая диаграмма	1	7
Круговая диаграмма	2	8
Диаграмма рассеивания	2	9

[1] Материал приложения может изучаться как в конце курса, так и в ходе изучения основного материала 8–9 по желанию учителя

Практическая работа. Построение диаграмм	1	7–9
Контрольная работа № 1	1	
Глава III. Описательная статистика	**11**	
Среднее значение	1	10
Медиана	2	11
Практическая работа. Средние (арифметическое, медиана)	1	10–11
Наибольшее и наименьшее значение. Размах	1	12
Отклонения, дисперсия	3	13, 14
Свойства среднего арифметического и дисперсии* (резерв)	1	15*, 16*
Практическая работа. Отклонения и дисперсия	1	13–14
Контрольная работа № 2	1	
Глава IV. Случайная изменчивость	**3**	
Примеры случайной изменчивости	1	17
Рост человека	1	18
Точность измерений.	1	19
Глава V. Случайные события и вероятность	**4**	
Случайные события.	1	20
Вероятности и частоты	1	21
Классические модели в теории вероятностей	1	22
Как узнать и зачем нужно знать вероятность события?	1	23,24
Итоговое повторение материала	**3**	
Всего 34 ч, из них практических работ с компьютером	**4**	

Примерное почасовое планирование курса «Теория вероятностей и статистика» для 8 классов (34 ч). С компьютерной поддержкой практических работ

Темы курса	Примерное число часов	Пункты пособия
Глава VI. Математическое описание случайных явлений	**8**	
Случайные опыты. Элементарные события. Равновозможные элементарные события.	1	25–27
Вероятности элементарных событий.	1	28
Благоприятствующие элементарные события. Вероятности событий	2	29, 30
Опыты с равновозможными элементарными событиями. Решение задач.	2	31
Практическая работа «Случайные числа. Равновозможные события»	1	28–31
Контрольная работа №1	1	

Глава VII. Вероятности событий. Сложение и умножение вероятностей	**10**	
Противоположное событие. Диаграммы Эйлера	1	32
Объединение и пересечение событий	2	33, 34
Несовместные события. Правило сложения, формула сложения вероятностей	2	35,36
Случайный выбор. Независимые события. Умножение вероятностей	3	37,38
Контрольная работа № 2	1	
Глава VIII. Элементы комбинаторики	**6**	
Правило умножения. Перестановки. Факториал	1	39, 40
Задачи на вычисление вероятностей	1	41
Сочетания	1	42
Сочетания в задачах на вычисление вероятностей	2	43
Практическая работа «Факториал, число сочетаний, вероятность»	1	39–43
Глава X. Испытания Бернулли	**8**	
Успех и неудача. Число успехов в испытаниях Бернулли.	2	47,48
Вероятности событий в испытаниях Бернулли. Решение задач.	2	
Практическая работа «Вероятность событий в испытаниях Бернулли»	2	49
Решение задач.	1	
Контрольная работа № 3	1	50
Итоговое повторение материала	**2**	
Всего 34 ч, из них практических работ с компьютером	**4 ч**	

Вариант почасового планирования курса «Теория вероятностей и статистика» для 9 классов (34 ч). С использованием электронных средств (например, Excel) для проведения практических работ

Темы курса	Примерное число часов	Пункты пособия
Глава IX. Геометрическая вероятность	**2**	
Выбор точки из фигуры на плоскости и из числового отрезка	2	44, 45
Глава XI. Случайные величины	**8**	
Примеры случайных величин	1	50
Распределение вероятностей	2	51
Биномиальное распределение	2	52

Практическая работа. «Распределение. Построение биномиального распределения»	2	51,52
Контрольная работа № 1	1	
Глава XII. Числовые характеристики случайных величин	**11**	
Математическое ожидание и свойства математического ожидания	2	53, 54
Рассеивание значений, дисперсия, стандартное отклонение	2	55, 56
Свойства дисперсии	2	57
Математические ожидания числа успехов в серии испытаний Бернулли	1	58
Дисперсия числа успехов	1	59
Практическая работа. «Математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение»	2	53–59
Контрольная работа № 2	1	
Глава X. Случайные величины в статистике	**4**	
Измерения вероятностей, точность приближения	1	60,61
Практическая работа «Проверка близости частоты и вероятности»	1	60
Социологические обследования	1	62
Закон больших чисел	1	63
Приложение (резерв)[2]	**8**	
Число сочетаний	1	64
Формула бинома Ньютона	2	65
Свойства биномиальных коэффициентов	1	66
Треугольник Паскаля	1	67
Практическая работа «Построение треугольника Паскаля, свойства биномиальных коэффициентов»	2	66,67
Контрольная работа № 3	1	
Итоговое повторение материала	**1**	
Всего 34 ч, из них практических работ с компьютером	**7 ч**	

Примечания.

1. Число часов, предлагаемое в таблицах примерного планирования, является ориентировочным; оно рассчитано, исходя из значимости и объема материала.

2. Указанные темы практических работ являются примерными. Практические работы с использованием компьютерных средств могут применяться также при изучении материала глав VI–VII.

---

[2] Материал приложения может изучаться как в конце курса, так и в ходе изучения основного материала 8-9 по желанию учителя