О ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ
(МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ)

От редакции. Настоящая статья написана по первым итогам работы по введению в школьный курс математики элементов теории вероятностей и статистики, предусмотренных стандартом образования. В ней предлагается единая система понятий, обозначений и терминологии для преподавания данного раздела математики в школе, согласованная между авторами ряда новых учебных пособий по вероятности и статистике.

Введение

В 2003 г. было принято решение о включении элементов теории вероятностей и статистики в школьный курс математики общеобразовательной школы (см. инструктивное письмо № 03–93ин/13–03 от 23.09.2003 Министерства образования РФ «О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы», «Математика в школе», № 9 за 2003 г.). К этому моменту элементы теории вероятностей и статистики уже более десяти лет в разрозненном виде присутствовали в известных школьных учебниках алгебры для разных классов [1], [3], [4], и в виде отдельных учебных пособий [2, 5]. Однако в изложение вероятностно-статистического материала в них, как правило, не носило систематического характера, а учителя, чаще всего, не обращались к этим разделам, не включали их в учебный план.

Принятый Министерством образования в 2003 г. документ предусматривал постепенное, поэтапное включение этих разделов в школьные курсы, давая возможность преподавательскому сообществу подготовиться к соответствующим изменениям.

В 2004–2008 гг. выходит ряд учебных пособий, дополняющих существующие учебники алгебры. Это издания [6]–[12]. В помощь учителям также вышли методические пособия [13], [14]

В течение ряда лет все эти учебные пособия проходили апробацию в школах. Так Московским школам были предложены учебные пособия [6], [7], [9]. В условиях, когда переходный период внедрения в школьные программы завершился, и разделы статистики и теории вероятностей заняли свое место в учебных планах 7–9 классов, требуется анализ и осмысление согласованности основных определений и обозначений, используемых в этих учебных пособиях.

Отметим, что все эти учебные пособия создавались в условиях отсутствия традиций преподавания этих разделов математики в школе. Такое отсутствие вольно или невольно провоцировало их авторов учебных пособий на сравнение с имеющимися учебниками для вузов. Последние же в зависимости от сложившихся традиций по отдельным специализациям высшей школы часто допускали существенный терминологический разнобой им различия в обозначениях основных понятий и записи формул.

Анализ содержания указанных выше школьных учебных пособий показывает, что они на сегодняшний день унаследовали от учебников высшей школы эти особенности. Но то, что терпимо, учитывая сложившиеся традиции, в рамках четко очерченной специальности в высшей школе, в общеобразовательных школах, на наш взгляд, неприемлемо.

С большей степенью точности можно утверждать, что выбор конкретного учебного материала по новым для школы разделам математики, касающихся понятия «случайного», происходит в настоящий момент самым что ни на есть случайным образом, вплоть до названий и обозначений.

Поэтому коллективы авторов ведущих школьных учебных пособий по теории вероятностей и статистики решили объединить свои усилия под эгидой Московского института Открытого Образования для выработки согласованных позиций по унификации основных определений и обозначений, используемых в учебных пособиях для школы по теории вероятностей и статистике. При этом мы ни в коей мере не собираемся ограничивать методические подходы в изложении материала.

Элементы статистики в школьном курсе. Терминологические замечания и соглашения

Преподавание элементов статистики в школьном курсе математики имеет свои особенности, сказывающиеся и на используемой при этом терминологии. В высшей школе чтение курсов математической статистики и просто статистики (общей теории статистики), как правило, проходит после того, как студенты познакомились в курсе теорией вероятностей с понятиями: случайной величины, ее теоретическими характеристиками (закона распределения, математическим ожиданием, дисперсией, медианой и т.п.) с последовательностями независимых наблюдений случайной величины и т.д. Понятия случайной величины и выборки закладываются в основу обоснования статистического вывода, построения различных оценок числовых характеристик случайных величин.

В школьном курсе изучение основных понятий статистики, очевидно, должно проходить на другом, элементарном уровне. Поэтому авторы ряда основных школьных учебных пособий [6], [8], [9] предлагают начинать знакомство с разделами теории вероятностей и статистики именно со статистики. Такой подход исходит из нескольких методических соображений. Во-первых, материал описательной статистики (таблицы и диаграммы) прост для освоения в 7 классе. Во-вторых, при обсуждении реальных статистических данных хорошо иллюстрируется само понятие случайной изменчивости окружающего нас мира. Тем самым готовится концептуальная база для понятий «случайный эксперимент» и вероятности различных исходов этого эксперимента. В-третьих, показывается, как формализуются и описываются данные окружающего нас мира. В-четвертых, у учителей на простом материале есть возможность повторить и закрепить ряд тем, пройденных в школьном курсе ранее (скажем, проценты).

При такой перестановке мы вынуждены говорить о тех или иных характеристиках данных в отсутствии понятия случайной величины и ее закона распределения. В этих условиях предлагается говорить о числовых и графических характеристиках «набора чисел». Другой методический подход [9] предлагает изучать элементы статистики в школе после комбинаторики и теории вероятностей. При этом, однако, понятие случайной величины в теории вероятностей не вводится, и опять приходится говорить о числовых характеристиках «набора чисел». По мнению авторов [10] в школьном курсе вполне возможно обойтись без упоминания случайных величин.

Набор чисел и, связанные с ним, числовые характеристики

Понятия «среднего арифметического», «медианы», «размах», «отклонения от среднего», «дисперсии» вводятся для «набора чисел». Нежелательно использовать термины: «среднее», «медиана», «дисперсия» в отрыве от «набора чисел», так как в дальнейшем эти же термины будут использоваться для описания числовых характеристик случайных величин. Будет говориться о среднем, медиане и дисперсии случайной величины. Даже если рассматриваемый нами «набор чисел» является наблюдениями за некоторой случайной величиной среднее, медиана и дисперсия этого набора чисел чаще всего не совпадает со средним, медианой и дисперсией случайной величины. Эти характеристики рассчитываются по различным формулам. Однако частичное сходство терминов не случайно. Перечисленные характеристики указанного набора чисел могут давать нам приближенное представление об аналогичных характеристиках случайной величины. Эта взаимосвязь является очень важной в математической статистике.

На наш взгляд нет никакой необходимости на этом этапе вводить в школьный курс термин «выборки» в его строгом математическом смысле. (К этому вопросу мы еще вернемся, обсуждая трактовку термина генеральная совокупность и выбор из нее.)

Одновременно представляется не совсем удачным называть «набор чисел» – данными, и вводить слово «данные» как термин. С одной стороны слово «данные», как слово обыденного языка, является слишком размытым и неопределенным. А с другой стороны, выражение «анализ данных» и его английский первоисточник «Data analisis» в научной терминологии прочно закрепились за разделами математической статистики.

Абстрактные значения набора чисел принято обозначать малыми латинскими буквами: $x, y, z\ldots$ или индексированными символами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Заглавные латинские буквы X, Y, Z в теории вероятностей резервируются для обозначения случайных величин. Для возможных значений величин будут использоваться те же обозначения, что и для числового набора $x, y, z\ldots$ или $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Для обозначения среднего арифметического набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (или кратко просто среднего значения набора чисел) следует использовать выражение x с чертой над символом x. Это соответствует общепринятой мировой практике. При этом записывать среднее арифметическое набора чисел лучше в виде дроби, в числителе которой стоит выражение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Использование символа суммирования Σ в основной школе с различными способами указания индексов суммирования и т.п. представляется не целесообразным.

Дисперсию числового набора (набора чисел) $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Принято обозначить S^2 (читается «эс-квадрат»). При этом в знаменателе дроби, задающей дисперсию набора чисел, стоит именно количество чисел в числовом наборе n. Говоря языком математической статистики, величина S^2 является смешенной оценкой дисперсии $D(X)$ случайной величины X, при том, что числовой набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является независимыми наблюдениями этой случайной величины. Модификацию этого выражения с заменой в знаменателе дроби n на $(n-1)$, для получения не смешенной оценки дисперсии $D(X)$ случайной величины X, в школьном курсе статистики предлагается не рассматривать. Во избежание путаницы с дисперсией случайной величины, не рекомендуется обозначать дисперсию набора чисел символом

D, зарезервированным в российской математической традиции для обозначения дисперсии случайной величины. Международная традиция использует для обозначения характеристики изменчивости случайной величины вместо термина «дисперсия» термин «вариация» и соответствующее обозначение $Var(X)$. На наш взгляд, учитывая национальную традицию, не следует в школе использовать термин «вариация», оставляя это слово для обозначения изменчивости в обыденной речи.

В старшей школе наряду с дисперсией набора чисел рассматривается корень квадратный из этой величины. Такую характеристику предпочтительней именовать «стандартным отклонением», придерживаясь международных стандартов. Кроме того, слово «стандартное» помогает лучше запомнить, что эта величина связана с возможными отклонениями значение из числового набора от среднего арифметического. Другое встречающееся в литературе название этой величины «среднее квадратичное отклонение».

Для медианы набора чисел предлагается не вводить никаких специальных символьных обозначений типа med, me и тому подобное.

Под размахом набора чисел (размахом числового набора) понимается величина разности между самым большим и самым маленьким числом в этом наборе. Никакого общепринятого обозначения для размаха в мировой практике не существует.

По усмотрению авторов учебных пособий может вводиться понятие моды набора чисел. Под модой понимается самое часто встречающееся значение в наборе чисел. Из этого определения ясно, что мода может не иметь однозначного числового выражения. Поэтому в определении моды требуются уточнения. Для набора чисел, где каждое значение встречается только один раз или одинаковое число раз (скажем два), говорят, что мода отсутствует. Если несколько значений в наборе чисел (но не все) встречаются с одинаковой наибольшей частотой, то говорят, что мода принимает несколько значений. Так в наборе чисел 1, 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7 мода принимает одновременно три значения 2, 4, 7.

Генеральная совокупность и выборка в школьном курсе статистики

Информационная культура давно ввела в оборот понятие «генеральной совокупности». Оно употребляется в газетах и других средствах массовой информации. Однако обсуждать этого понятия во всем его объеме в школьном курсе нет необходимости. На наш взгляд, этот термин, если он употребляется в учебных пособиях и учителем должен рассматриваться лишь как синоним всей конечной совокупности обсуждаемых объектов. Скажем, если при решении конкретной задачи рассматриваются учащиеся конкретного класса, то все эти учащиеся и будут для нас составлять «генеральную совокупность». При обсуждении вопросов, относящихся к учащимся всей школы, «генеральную совокупность» будет состоять из учащихся этой школы. Генеральные совокупности могут быть и бесконечными. Однако это значительно более сложное понятие, которое на наш взгляд, нет такой необходимости обсуждать в школе. Точно так же не стоит обсуждать и выбор из бесконечной генеральной совокупности. Введение термина «конечная генеральная совокупность в указанном выше смысле конечной совокупности объектов не является обязательным и оставляется на усмотрение учителя и авторов учебных пособий.

На практике о всей «генеральной совокупности» часто судят лишь по какой-то ее части. В курсе статистики основной школы мы называем «выборкой» отобранную часть объектов из конечной «генеральной совокупности» не оговаривая каких-либо требований к самому способу отбора. У выбранных объектов может быть измерена какая-то их числовая характеристика. Полученные таким образом числа и образуют «набор чисел». Такой набор чисел можно назвать и выборкой из рассматриваемой генеральной совокупности. На наш взгляд в школьном курсе не стоит употреблять термин «выборка» без указания генеральной совокупности, из которой она получена.

Графические способы представления статистических данных

К графическим способам представления статистических данных в школьном курсе, прежде всего, относятся: «столбиковая диаграмма», «круговая диаграмма», «гистограмма» и «диаграмма рассеивания». По ряду этих терминов в учебной и научной литературе и широко распространенных компьютерных пакетах можно встретить исторически сложившиеся разночтения. Мы предлагаем упорядочить в школьном курсе терминологию в этой области следующим образом.

Для графического изображения чисел в наборе мы рекомендуем использовать термин «столбиковая диаграмма». Не использовать в школьном курсе названия того же графика в виде «столбчатой диаграммы» По внешнему виду столбиковую диаграмму часто путают с другим графиком – «гистограммой», отражающим совершенно другие характеристики набора чисел. Заметим, что в русификации известной компьютерной программы EXCEL, столбиковая диаграмма не совсем корректно переведена как «гистограмма». Существует особый тип данных – сгруппированные данные – на которых столбиковая диаграмма является по сути «гистограммой». То есть гистограмма является частным случаем столбиковой диаграммы, для специальным образом сгруппированных исходных наборов чисел.

На это стоит обратить внимание учащихся, если в курсе информатики рассматриваются графические способы представления данных в EXCEL.

Термин «круговая диаграмма» не имеет на русском языке широко распространенных разночтений, типа «нарезанного пирога», хотя по смыслу и произошел от этого английского термина.

Термин «гистограмма» и соответствующий ему график, как было уже отмечено выше, имеет четко очерченный смысл, отличный от термина «столбиковая диаграмма». Не имея каких-то разночтений термин «гистограмма», однако, нуждается в уточнении. По оси ординат графика гистограммы можно откладывать как число значений из числового набора, попавшего в заданный интервал группировки, так и долю этих значений во всем наборе. Эти два типа гистограммы связаны с понятиями «абсолютной» и «относительной частоты». Сами эти термины порождают заметную путаницу у учащихся. Для построения гистограммы и для других аналогичных способов описания изменчивых данных предлагается использовать в школьном курсе просто термин «частота». Под «частотой» в общем случае понимается отношение числа наступлений события к общему числу наблюдений, или другими словами их доля в наборе наблюдений. То есть, термин «частоту» предлагается использовать в смысле относительной частоты. При этом термин «абсолютная частота» лучше не употреблять совсем, а там где в нем возникает потребность говорить о числе наступлений интересующего нас события. В теории вероятностей, термин «частота» нужен для частотного определения вероятности события. При построении гистограммы с каждым интервалом группировки данных мы связываем «частоты» попадания чисел из заданного набора в указанный интервал. Эта часто и откладывается на графике гистограммы по оси ординат. Подобный однозначный подход к определению гистограммы связан с тем, что в математической статистике это график дает примерное представление о плотности распределения непрерывной случайной величины.

Путем сделанных соглашений получаем очень простое определение гистограммы. Гистограмма это столбиковая диаграмма частот попадания чисел в заданные интервалы группировки.

Говоря о диаграммах рассеивания, в учебной литературе можно встретить две формы написания этого термина: диаграмма рассеивания и диаграмма рассеяния. На наш взгляд допустимо использование любого из этих терминов.

Для наглядного представления частоты наблюдений в наборе может привлекаться график именуемый «полигоном частот». Рассмотрение этого типа графиков оставляется на усмотрение учителя. Иногда этот график именуют «многоугольником частот». Использование последнего термина на наш взгляд не желательно, так как изображенная на графике фигура не является не замкнутой и не является многоугольником.

Комбинаторика. Основные положения в основной школе

До сих пор в учебниках часто наблюдается тенденция сведения элементарной теории вероятностей к комбинаторике. У подобной тенденции есть свои исторические корни. Они восходят к тем временам в XVII–XIX вв., когда теория вероятностей, прежде всего, использовалась в задачах, связанных с азартными играми. Однако современная теория вероятностей давно «переросла» «игровые задачи». Роль в ней комбинаторики сейчас не столь велика. Однако в современной математике комбинаторные методы имеют самостоятельное значение, они активно применяются в дискретной математике и в широком спектре прикладных задач.

Главная задача элементов комбинаторики в школьной программе на наш взгляд заключается в том, что учащиеся получают представление о вариативности, о различных вариантах и их числе, которые могут возникнуть во многих житейских ситуациях. Разбор элементарных комбинаторных задач в школьном курсе надо начинать с обычного перечисления вариантов, получаемых естественным образом, а не с заучивания формальных обозначений. Например, учащиеся должны убедиться, что им вполне по силам выписать и перечислить все возможные варианты различных бутербродов из двух сортов хлеба и трех сортов колбасы. В ряде случаев удобно и наглядно использование дерева вариантов.

Комбинаторное правило умножения вытекает из подобных задач естественным, интуитивно понятным образом. Аналогичным образом следует подходить и к задачам на перестановки. Сначала учащиеся должны на простых примерах разобраться, что в задаче о перестановке трех элементов на первое место может претендовать любой из трех элементов, на второе – любой из двух оставшихся, а на последнее – только один, не выбранный ранее. Научится выписывать все возможные перестановки в подобных задачах И лишь затем переходить к формульному описанию числа перестановок с помощью факториала числа n, т.е. $n!$. При этом формальное вычисление факториала следует закрепить, так как оно возникает во многих комбинаторных задачах.

Говоря о формальных комбинаторных обозначениях в школьном курсе, мы считаем, что следует ограничиться их минимальным числом. А именно, факториалом числа $n!$ и числом сочетаний C_n^k. А такие обозначения, как P_n – для числа перестановок, и A_n^k – для числа размещений использовать не обязательно, чтобы не вносить дополнительную путаницу и формализм. Последнее не означает, что не надо вообще обсуждать перестановки и размещения, но, говоря о них, следует, не экономя бумаги, называть понятия своими именами, а не трудными для написания (с учетом верхнего и нижнего индексов) символьными выражениями. Точно так же на наш взгляд лучше избегать формальных определений следующего типа:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}.$$

В использовании комбинаторных обозначений мы делаем исключение для числа сочетаний C_n^k. Это связано с тем, что это выражение используется в ряде других важных тем школьного курса: в треугольнике Паскаля, биноме Ньютона и в биноминальном распределении. Для соблюдения единообразия мы считаем, что следует избегать использования в школьном курсе для обозначения числа сочетаний еще одного распространенного выражения (k^n). Нам представляется так же важным соглашение, когда в выражении C_n^k символ n (обозначение общего числа объектов, из которых осуществляется выбор) стоял именно внизу. Сейчас в некоторых школьных учебниках можно встретить и выражение C_m^k (речь идет о выборе n элементов из m). Следует помнить, что учащимся плохо даются в написании индексы, так и их порядок и, по возможности, приучить их одной единообразной записи, не меняя в ней обозначений для индексов.

Основные понятия и обозначения теории вероятностей

Случайный эксперимент. Элементарные события. Обозначение и запись

Базовым понятием теории вероятности является «случайный эксперимент», или случайный опыт. Это равносильные понятия.

В результате случайного эксперимента может произойти или не произойти то или иное «элементарное событие». Опыт оканчивается одним и только одним из элементарных событий.

Наряду с термином «элементарное событие» можно как синоним употреблять и термин «элементарный исход». Элементарный исход – это другое название элементарного события. Для общего обозначения различных элементарных событий мы предлагаем использовать начальные строчные буквы латинского алфавита: $a, b, c, d, \ldots,$ не привлекая для обозначения буквы греческого алфавита. (Во многих вузовских учебниках по теории вероятностей для обозначения элементарного события используют букву ω, а для обозначения нескольких различных элементарных событий: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots$). Также мы рекомендуем не употреблять без крайней необходимости для обозначения различных элементарных событий символы с индексами, типа: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и т.д. Заглавные начальные буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д. принято резервировать для обозначения произвольных событий. Таким произвольным событием может, в частности, быть и элементарное. Нет необходимости добиваться строгого разграничения в обозначениях произвольных событий и элементарных, так как операции над событиями, скажем пересечение событий, могут в результате порождать элементарные события.

В конкретном случайном эксперименте элементарное событие может записываться по-разному, в зависимости от самого эксперимента. Скажем, если игральную кость бросают дважды, то различные элементарные события в этом случайном эксперименте могут быть записаны так: $a = (3;\ 4)$, $b = (1;\ 1)$, $c = (6;\ 4)$, $d = (4;\ 6)$, где первое число в скобках обозначает количество очков выпавших при первом броске, а второе – при втором. Можно записать эти же события без присвоения им названий, просто: (3; 4), (1; 1), (6; 4), (4; 6). Названия элементарных событий, как и событий вообще, удобны для записи выражения их вероятности. Так вероятности указанных выше элементарных событий записываются как: $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$, $P(d)$. Отсутствие скобок в записи $P(a)$ следует считать ошибкой. По смыслу $P(a)$ – число, приписываемое элементарному событию a. Если не возникает недоразумений, скобки при записи конкретного исхода эксперимента могут быть опущены. Так элементарные события при подбрасывании монеты два раза могут быть условно записаны как a = ОО, b = ОР, c = РО, d = РР, где символы О и Р соответственно обозначают орел и решку. При записи вероятностей элементарных событий допустимы, хотя и не очень желательны, выражения Р(ГГ).

Перечисляя все возможные элементарны окончания случайного эксперимента (опыта), мы приходим к совокупности всех элементарных событий. Эту совокупность часто называют пространством элементарных событий. Слово пространство здесь не следует рассматривать как математический термин, а лишь как образное выражение, призванное вызвать геометрические ассоциации. Эту совокупность элементарных исходов можно называть и множеством всех элементарных исходов. Математическая теория вероятностей, с которой многие школьники столкнутся в вузах, использует термин «пространство», однако, вводить и употреблять его в школьном курсе не обязательно.

Случайные события. Обозначения и терминология

Для обозначения произвольных случайных событий обычно используются начальные заглавные буквы латинского алфавита, т.е.: A, B, C, ... или эти же буквы с чертой над ними $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots,$ что говорит о том, что эти события являются противоположными событиями A, B и т.д.

Каждое случайное событие за исключением невозможного состоит из элементарных событий, или исходов. Про исходы, при которых происходит событие A, говорят, что они благоприятствуют событию A. Сами такие исходы называют благоприятствующими событию A, или благоприятными для A. От сложно произносимого слова благоприятствующие в дальнейшем можно отказаться. Важно, чтобы учащиеся понимали, что случайные события состоят из элементарных случайных событий, объединяют некоторую их часть. Так запись $A = \{a, b, c\}$ говорит, что событие A состоит из трех элементарных событий a, b, c. Это означает, что событие A происходит, когда в результате случайного эксперимента мы наблюдаем одно из элементарных событий a, b, c. Для того, чтобы подчеркнуть, что речь идет именно о совокупности (множестве) элементарных исходов в записи $A = \{a, b, c\}$ используются фигурные, а не круглые скобки.

Элементарные исходы a, b, c при этом называются благоприятствующими наступлению события A.

Вероятность случайного события обозначают $P(A)$. Вероятность любого случайного события – это определенное число. Вероятность события может быть любым числом между нулем и единицей. То есть для любого случайного события верно соотношение: $0 \le P(A) \le 1$. Иногда в обыденной речи, в средствах массовой информации и в некоторых книгах можно встретить выражение: «вероятность события составляет столько-то процентов». Мы предлагаем избегать использования в школьном курсе измерения вероятностей событий в процентах. Четкое представление о том, что вероятность не может быть больше единицы позволяет учащимся избегать ошибок при вычислении вероятностей, дает им дополнительный инструмент контроля возможных ошибок.

Среди всех случайных событий выделяют два особых вида событий. Достоверные события, т.е. те, которые в результате эксперимента происходят непременно, и невозможные события, т.е. те, которые в результате эксперимента точно не происходят. Достоверные и невозможные события – являются базовыми терминами в теории вероятностей. Как события, относящиеся к случайному эксперименту, они тоже называются случайными.

При этом вероятность невозможного события всегда равна нулю, а вероятность достоверного события всегда равна единице.

Иногда дополнительно используют выражение – неопределенное событие. Это выражение не является математическим термином, и используется как синоним для выражения, отделяющего достоверные и невозможные случайные события от всех остальных случайных событий.

Операции с событиями

На практике нас часто интересуют различные комбинации событий и их вероятности.

В школьном курсе рассматриваются понятия «противоположное событие», «объединение событий» и «пересечение событий». Рассматриваются и простейшие комбинации этих операций над событиями. В настоящее время в вузовских учебниках и научной литературе можно встретить различные способы обозначений операций над событиями. Одна из них использует теоретико-множественные обозначения для объединения и пересечения событий. При этом объединение событий A и B обозначается как $A \cup B$, а пересечение $A \cap B$. Мы считаем, что в школьном курсе целесообразно придерживаться именно этой системы.

С учетом того, что в вузовских учебниках часто можно встретить и другую символику отдельно поясним ее происхождение.

Вторая традиция прибегает к алгебраическим обозначениям объединения и пересечения событий, используя символы «сложения» и «умножения», понимаемые как операции в булевых алгебрах. В этом случае объединение событий записывается как $A + B$, а пересечение как $A \cdot B$, или просто AB. Мы думаем, что для средней школы эта система неприемлема, так как привычные для учащихся символы сложения и умножения чисел она использует в совершенно ином смысле. Это ведет к двусмысленности и путанице.

Мы предлагаем, говоря об операциях объединения и пересечения событий A и B, употреблять в школьных учебниках лишь обозначениями $A \cup B$ и $A \cap B$. Эти обозначения подчеркивают, что элементарные события (исходы) эксперимента во многих естественных ситуациях не имеют ничего общего с числами, отличаются от чисел (даже если для их записи мы решили привлечь числа). При начальном знакомстве с операциями над событиями важно не злоупотреблять в задачах формальными обозначениями объединения и пресечения событий, не порождать в задачах длинные формулы с многократным использованием этих символов. При первом знакомстве с объединением и пересечением событий, на наш взгляд, вполне допустим подход, когда использование знаков «$\cup$», «$\cap$» заменяется текстовым выражением. Скажем, обозначим объединение событий A и B через C, и далее говорим о событии C. (Подобный подход реализован в учебном пособии [6].)

Если пересечение событий A и B не содержит ни одного элементарного события, то результатом пересечения является пустое множество элементарных событий. Для него используется принятое в теории множеств обозначение «$\varnothing$», т.е. $A \cap B = \varnothing$.

Вероятность пустого множества по определению равна нулю: $P(\varnothing) = 0$. Пустое множество является невозможным событием.

Рекомендация не употреблять в школьных учебниках обозначения «+» и «$\cdot$» для операций с событиями распространяется и на знаки «–« и «\». То есть вместо выражения «$A - B$», подразумевающего события, включающее все элементарные исходы события A, которых одновременно нет в событии B, вместо громоздкой формулы, следует писать «произошло событие A, при том, что события B не произошло» (кратко A, но не B). Аналогичным образом следует поступать для записи симметрической разности. Вместо обозначения $A\Delta B$, принятого для симметрической разности в теории множеств, следует словами писать «произошло только одно из событий A и B».

Для обозначения противоположного события, событию A предлагается использовать черту над символом A. Не рекомендуется использовать обозначение ⌉A. Во избежание путаницы мы предлагаем не использовать выражение «дополнительное событие» для обозначения противоположного события.

С учетом высказанных пожеланий к обозначениям, формула сложения вероятностей для непересекающихся событий A и B примет вид:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Для произвольных событий A и B эта формула трансформируется в

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Заметим, что в этих формулах складываются и вычитаются именно вероятности событий (т.е. числа), а не сами события.

Формула произведения вероятностей для независимых событий A и B в предложенных обозначениях записывается как:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Опять же речь идет об умножении вероятностей, а не событий.

Условная вероятность

В старшей школе предполагается введение понятия условной вероятности события A при условии, что произошло событие B. Для обозначения подобной условной вероятности рекомендуется использовать запись $P(A \mid B)$. (События A и B в этой записи разделает вертикальная черта.) Не рекомендуется использовать обозначение $P_B(A)$. В школьном курсе понятие условной вероятности вводится только для событий B, вероятность которых отлична от нуля: $P(B) \neq 0$.

Литература

1. Математика: Учебники для 5–6 классов общеобразовательных учреждений. Под редакцией *Г.В.Дорофеева, И.Ф. Шарыгина*, – М.: Просвещение, Дрофа, 2000–2009.

Алгебра: Учебники для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. Под редакцией *Г.В.Дорофеева*, – М.: Просвещение, 2000–2009.

Алгебра и начала анализа: Учебники для 10–11 классов общеобразовательных учреждений./ *Г.В.Дорофеев, Л.В.Кузнецова, Е.А.Седова,* – М.: Просвещение, Дрофа, 2000–2009.

2. *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Вероятность и статистика, 5–9 кл. – М.: Дрофа, 2002–2009.

3. *Виленкин Н.Я.* Алгебра и математический анализ. 11 класс – М.: Мнемозина 2003–2009

4. *Зубарева И.И., Мордкович А.Г.* Математика: Учебники для 5–6 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2002–2009.

5. *Мордкович А.Г., Семенов П.В.* События. Вероятность. Статистика: Дополнительные материалы к курсу алгебры для 7–9 кл. – М.: Мнемозина, 2002–2009.

Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра–9 / Мордкович А.Г., Семенов П.В. – М.: Мнемозина 2008.

Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа: Учебники для 10–11 классов общеобразовательных учреждений, профильный уровень. / Мордкович А.Г., Семенов П.В. – М.: Мнемозина 2006.

6. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники» 2004.

Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., *Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя / Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко. – 2-е изд., исправленное и дополненное – М: МЦНМО: МИОО, 2008.

7. *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Основы статистики и вероятность. 5–11 кл.: учебное пособие – М.: Дрофа, 2008.

8. *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Вероятность и статистика. 5–9 кл. Электронное учебное пособие. – М.: Дрофа, 2007.

9. *Дорофеев Г.В.* Математика 5–9. учебное пособие / Е.А.Бунимович, В.А.Булычев. Просвещение. – 2009.

10. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г.* Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. Пособие для учащихся 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк; под ред. С.А.Теляковского. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2005.

11. *Ткачева М.В., Федорова Н.Е.* Элементы статистики и вероятность: Учеб. Пособие для 7–9 кл. общеобразоват. Учреждений / М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова. – М. Просвещение, 2004.

12. *Бродский И.Л., Литвиненко Р.А.* Вероятность и статистика 7–9 классы. Решение задач из учебников под ред. Г.В.Дорофеева. – М.: АРКТИ, 2006.

Е.А.Бунимович, Ю.Н.Тюрин, П.В.Семенов, В.А.Булычев, А.А.Макаров, А.Г.Мордкович, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко

ПРЕПОДАВАНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ В ШКОЛЕ

ПО УЧЕБНОМУ ПОСОБИЮ Ю.Н.ТЮРИНА, А.А.МАКАРОВА И ДР. «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА»

Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко
(Москва)

Назначение и место статистики и теории вероятностей в школе

В содержание среднего образования в России недавно внесены существенные изменения. В образовательный стандарт и школьную программу по математике (7–9 и 10–11 классы) включены элементы теории вероятностей и статистики. На наш взгляд значение этого события выходит далеко за рамки простого совершенствования школьной программы по математике. Оно требует общего обсуждения преподавания этих разделов в школе.

Заметим, что до сих пор в школьном курсе математики и других естественных наук в России господствовала только одна идея – о существовании жестких связей между явлениями и событиями. Эти связи представлены в форме формул, выражающих законы физики и химии; даже в курсе истории нет места случайности: он построен так, что складывается впечатление, что все события предопределены и закономерны. Такое представление природы и мира, в котором не упоминается о роли случайного, на наш взгляд, односторонне как идейно, так и технически. Оно не согласуется с современным мировоззрением, осложняет ориентацию в изменчивом информационном мире, не способствует формированию квалифицирован-