

Парадокс двух конвертов

Маша и профессор Иван Петрович – большие друзья. Профессор частенько ставит её в тупик хитрыми и заковырыстыми задачками.

Однажды, когда Иван Петрович исследовал свой новый генератор случайных чисел, к нему пришла Маша. Профессору пришлось немного отвлечься:

– Ты знаешь, Маша, что такое генератор случайных чисел (ГСЧ) и для чего он используется?

– Нет, – ответила Маша.

– О, это очень полезная штука. Генератор придумывает случайные числа в определённом диапазоне. Сделать хороший ГСЧ очень непросто – числа должны быть как можно более случайными. Без случайных чисел невозможен почти ни один статистический эксперимент, даже интернет без него никак не может.

– Это как? – воскликнула Маша.

– Современный интернет немислим без шифрования, а шифрование невозможно без хороших ГСЧ. Ну и куда же без игр! Случайные числа дают разнообразие во многих играх. Давай сыграем в одну.

Сейчас мой ГСЧ выберет совершенно случайное число из большого интервала.

– А что такое большой интервал?

– От нуля до какого-то очень большого числа.

– А до какого?

– А я даже не знаю. Генератор хитрый.

– До миллиона?

– Может и до миллиона. Или меньше... А может и больше. Одно могу сказать – до большого. Не отвлекайся. Генератор выберет какое-то число, разделит его в отношении один к двум, получившиеся два числа напечатает на двух листках бумаги. Подсматривать пока нельзя. Потом ты наугад выберешь себе листок, а второй я возьму себе. Тебе разрешается посмотреть, какое число на твоём листке. Затем ты решишь, хочешь ли ты поменяться листками. Каждый выиграет столько очков, какое число у него окажется. Начнём?

Профессор запустил ГСЧ, который сделал всё, как было велено. Из принтера вылезли два листка.

Профессор не глядя схватил их, сложил вчетверо и быстро несколько раз поменял местами. Маша зажмурила глаза, покрутилась на месте, бормоча про себя считалочку, а затем ткнула пальцем в один из листков. Развернув листок, она увидела число 12024,754. Чтобы лучше сосредоточиться, Маша стала рассуждать вслух¹.

– У меня около 12000. С одинаковыми шансами ваше число может быть вдвое больше (примерно 24000) или вдвое меньше (около 6000). Значит, если я поменяюсь, то рискую потерять примерно 6000, но в случае удачи получу число на 12000 больше, то есть ожидание больше², чем у меня сейчас. Значит, мне выгодно поменять листок! – воскликнула Маша.

Она решительно отобрала у Ивана Петровича его листок и снова задумалась:

– Хм, Иван Петрович, а ведь вам тоже выгодно меняться – ведь вы в таком же положении, как и я. То есть... если конечно... я имею в виду... хотя всё равно... Странная игра какая-то: мне выгодно и вам выгодно, а выигрывает только один. А если бы мы не подсматривали в свои листки? Всё равно было бы выгодно поменяться. А когда поменялись – ещё раз выгодно поменяться, и так до бесконечности! Ерунда какая-то! – пожаловалась Маша.

Иван Петрович хитро улыбнулся и сказал:

– Ты сейчас сформулировала парадокс двух конвертов. Впервые похожую задачу в 1953 году предложил бельгийский математик Морис Крайчик на примере двух галстуков.

Каждый из двух господ считает, что его галстук красивее. Чтобы решить спор, они обращаются к третьему, известному тонким вкусом в вопросах галстучной моды. Победитель должен подарить побеждённому

¹ Она всегда так делает в затруднительной ситуации.

² Образованная Маша говорит о математическом ожидании числа на втором листке. Она имеет в виду

$$(12014,754 : 2) \cdot \frac{1}{2} + (12014,754 \cdot 2) \cdot \frac{1}{2} = 15018,4425.$$

Это число в 1,25 раза больше, чем число, которое у Маши сейчас. Потому Маша и хочет поменяться.



свой галстук в утешение. Каждый из спорщиков рассуждает следующим образом: «Вероятности выигрыша и проигрыша равны. Я знаю, насколько красив мой галстук. Конечно, я могу лишиться его, но в случае проигрыша буду иметь два галстука – мой и ещё более красивый. Поэтому преимущество на моей стороне». Как может в одной игре с двумя участниками преимущество быть на стороне каждого?

Сейчас парадокс больше известен как парадокс двух конвертов³: есть два неразличимых конверта с деньгами. В одном находится сумма денег в два раза больше, чем в другом. Конверты дают двум игрокам. Каждый из них может открыть свой конверт и пересчитать в нём деньги. После этого игроки должны решить: стоит ли обменять свой конверт на чужой?

– Мария, давай посмотрим, а есть ли парадокс на самом деле. Все твои рассуждения основаны на том, что шансы того, что число на втором листке будет в два раза больше или в два раза меньше, равны. Но так ли это?

Предположим, что мама купила конфет и предложила тебе сыграть в такую же игру, но с конфетами. Она разделила их в отношении один к двум и одну из этих частей – случайно выбранную – дала тебе. Тебе досталось 500 г. Как ты думаешь, стоит ли тебе поменяться в данном случае?

– Ну, нет! – воскликнула Маша. – Я не верю, что мама за один раз купит полтора килограмма конфет!

– Вот видишь, при наличии информации о том, сколько обычно мама покупает конфет, ты оценила шансы вовсе не как одинаковые, – сказал профессор. – Вот одна из ловушек, в которую часто попадает человек. Если у нас нет полной информации о событиях, люди часто почему-то считают их шансы одинаковыми.

Профессор продолжил.

– Давай ещё раз посмотрим на нашу игру внимательно. Мы выбрали число, разделили его в отношении

³ В разных похожих формулировках задача носит название «парадокс двух шкатулок», «парадокс двух карманов», «парадокс обмена» и т.д.

один к двум, получившиеся числа напечатали на листках и дали один из них тебе. Наудачу мы выбрали только исходное число и доставшийся тебе листок, но не написанные числа! Ты считаешь математическое ожидание числа на втором листке, исходя из числа на первом. Когда речь пошла о конфетах, ты быстро сообразила, что 500 г это много и менять ничего не надо: ты прикинула границы маминой щедрости и переоценила вероятности. А почему же ты не делаешь этого в случае с числами?

Маша задумалась:

– От конфет бывает диатез. И ещё они дорого стоят. А числа бесплатные, и диатеза от них не бывает. И с чего бы ваш генератор стал жадничать?

– Мой генератор, голубушка, конечно, не твоя мама, но тоже вовсе не аттракцион невиданной щедрости.

Маша не слушала ехидного профессора и продолжала:

– Исходное число не может быть бесконечно большим, значит, чем больше число на моём листке, тем больше шансов, что на другом меньшее число, и наоборот. Но только что такое «маленькое» и «большое» – ведь я не знаю, какое число выбрал генератор...

– Так и есть, – подтвердил профессор, – но, как и в случае с мамиными конфетами, есть граница: генератор не может дать любое число. Он выбирает его из большого интервала, но не бесконечного. Мы не знаем границу, но это не значит, что её нет. И равных шансов нет! И парадокса нет!

– Да, – Маша вздохнула, – чего нихватишься, ничего нет.

– Ты вот лучше скажи, какие уроки мы получили из всего этого?

– Во-первых, – Маша замолчала было, но всё же справилась с мыслью, – при отсутствии информации о шансах событий не следует их считать равными. Во-вторых, если в ходе игры мы получаем новую информацию, то хорошо бы знать, изменились ли после





этого вероятности и как. До того как я развернула свой листок, я ещё могла считать, что на втором листке число больше или меньше с одинаковыми вероятностями. Но после того как я узнала своё число, эти вероятности для меня изменились, но только я не знаю как – ведь я не знаю числа, которое загадал ваш противный и жадный ГЧС.

– Не ГЧС, а ГСЧ. И дело даже не в исходном числе. Если тебе известно максимальное число, которое генератор может дать, сумеешь ли ты предложить выигрышную стратегию в этой игре? – спросил профессор.

– Кажется, да! – воскликнула Маша, – если моё число больше трети максимально возможного, то листок менять нельзя, а если меньше, то непонятно, но я бы поменяла.

– Неплохо, неплохо, – потёр ладони профессор, – теперь давай немного изменим правила. Мы с генератором, как и прежде, втайне от тебя, загадываем число, я записываю его на листке бумаги, сворачиваю и даю тебе. Потом бросаю монетку. Если выпал орёл, на другом листке пишу число вдвое больше чем твоё, а если решка – вдвое меньше. Теперь ты должна решить, менять листок или нет. Как будешь действовать?

Немного подумав, Маша стала рассуждать:

– В этой игре число на втором листке с равными шансами определяет монета, и они не меняются в ходе игры. Значит, мои рассуждения о математическом ожидании числа на втором листке будут верными, и мне надо всегда меняться!

– Конечно, – улыбнулся в ответ Иван Петрович, – ты уловила разницу между новой игрой, в которую, как ты думала, играла раньше, и той, что была на самом деле. Вероятностные парадоксы так обычно и получаются: люди играют в одну игру, а думают, что в другую. Теперь тебя на мякине не проведёшь.

– А всё же жаль, Иван Петрович. Парадокс – это так увлекательно, так таинственно.

– Не волнуйся, Машенька. На твой век парадоксов хватит.