

И. ВЫСОЦКИЙ,  
i\_r\_vysotsky@hotmail.com,  
г. Москва

40

МАТЕМАТИКА | декабрь | 2015

10 класс

# КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

■ В апреле 2015 года через информационную систему Статград школам впервые предлагалась контрольная работа по теории вероятностей для 10-х классов. Работа содержала 7 заданий (всего 10 пунктов) и была рассчитана на один урок.

Демонстрационный вариант работы был доступен на сайте Статграда и на сайте Лаборатории теории вероятностей на протяжении месяца перед работой. Верное выполнение каждого пункта оценивалось в 1 балл. Была рекомендована схема перевода первичного балла в отметку по пятибалльной шкале:

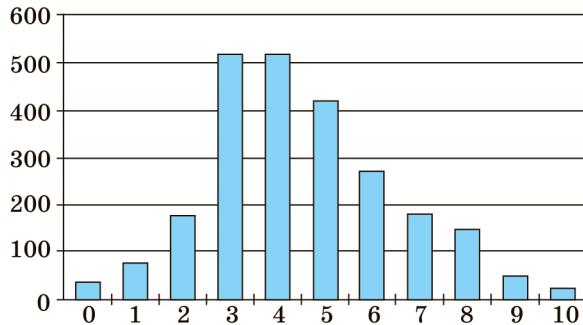
- 0–2 балла — «неудовлетворительно»;
- 3–4 балла — «удовлетворительно»;
- 5–7 баллов — «хорошо»;
- 8–10 баллов — «отлично».

Работа предлагалась на одном уровне требований. Охват материала был значительным — от простейших задач на поиск вероятностей в классическом эксперименте с монетой до заданий на условную вероятность и свойства распределений случайных величин. Все задачи были типовыми и не должны были вызывать проблем у учащихся, изучавших соответствующие темы. Однако во многих школах преподавание теории вероятностей в старших классах сводится к решению узкого набора однообразных задач ЕГЭ. По этой причине работу в целом можно было охарактеризовать как сложную.

Работу писали 2412 учащихся из 97 школ в 5 регионах России.

Анализ работы показал, что десятиклассники плохо справляются с первым заданием, хотя, казалось бы, оно не должно вызвать никаких трудностей. Вероятно, это связано с тем, что многие учителя натаскивают школьников на вероятностные задачи ЕГЭ и при этом мало внимания обращают на простейшие классические эксперименты с монетами или кубиками.

Только три образовательных учреждения отметили темы, связанные со случайными величинами и условной вероятностью как неизученные. На самом деле таких школ, конечно, больше. Распределение учащихся по баллам показано на диаграмме.



Средний балл: 4,51 (из 10). Медиана: 4. Стандартное отклонение: 1,92



К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте [www.1september.ru](http://www.1september.ru)  
(Вариант 2.)

Хорошо заметен «скакок» на границе 2–3 балла, то есть при переходе к школьной тройке. Менее выражен скакок на границе 7–8 баллов и почти не наблюдается тенденции к завышению отметки на границе «тройка–четверка» (4–5 баллов). Для устранения искажений, связанных с «натягиванием», была проведена коррекция распределения. Оценка доли завышенных отметок на границе 2–3 балла — около 5,8%, на гра-

нице 7–8 баллов — около 2,8%. При этом средний первичный балл 4,51 практически не изменился, поэтому его можно считать надежным показателем выполнения работы в целом.

В будущем учебном году планируется провести аналогичную работу на двух уровнях — базовом и углубленном. Аналогичный переход к двум уровням планируется и в московских городских контрольных работах для 7-х и 8-х классов.

## Тематическая диагностическая работа по теории вероятностей и статистике

### **Вариант 1**

**Для заданий 1–4 запишите только ответ.  
Для заданий 5–7 запишите полное решение и ответ.**

**1.** Игровую кость подбрасывают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпало меньше 4 очков.

**2.** В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 — из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Швеции.

**3.** В люстру ввернули две новые совершенно одинаковые лампочки. Вероятность того, что в течение первого месяца службы лампочка перегорит, для обеих лампочек одна и та же. Перегореть лампочки могут независимо друг от друга. Известно, что вероятность того, что к концу первого месяца обе лампочки будут исправны, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в течение первого месяца обе лампочки перегорят.

**4.** В некотором месте плохая мобильная связь. Известно, что, находясь в этом месте, вероятность успешно отправить смс равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех смс три окажутся отправленными, а одну отправить не удастся?

**5.** На уроке физкультуры школьники тренировались в прыжках в длину. В таблице даны длины прыжков (в см) одного из школьников. Среднее арифметическое результатов равно 151,8 см.

Попытка	Результат (см)	Попытка	Результат (см)
1	51	6	225
2	232	7	49
3	227	8	226
4	227	9	210
5	223		

**а)** Найдите медиану, а также наибольшее и наименьшее значение результатов.

**б)** Какая из четырех мер (среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее) лучше подходит для описания наивысшего достижения этого школьника? Какая величина лучше подходит для описания типичного прыжка? Обоснуйте свой ответ.

**6.** В конце некоторой игры Андрей имеет две попытки, чтобы, бросая монету, выбросить орла. Если оба раза выпадает решка, то Андрей проигрывает. Известно, что Андрей выиграл. Найдите вероятность того, что Андрею пришлось подбрасывать монету дважды.

**7.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют следующие распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0,5 & p & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

**а)** Найдите неизвестную вероятность  $p$ .

**б)** Чему равно математическое ожидание случайной величины  $X$ ?

**в)** Найдите распределение случайной величины  $Z = X + Y$ .

## Ответы, решения, критерии оценивания

### **Ответы к заданиям 1–4**

№ задания	Ответ
1	0,25
2	0,36
3	0,01
4	0,2916

### **Решения и ответы к заданиям 5–7**

**5. а)** Расположим значения результатов чисел в порядке возрастания:

49, 51, 210, 223, 225, 226, 227, 227, 232.

Медианой является пятое число в этом ряду: 225.

**б)** Чем дальше прыгнул спортсмен, тем лучше. Поэтому лучший результат — это наибольший результат. Наибольшее и наименьшее показывают наилучший и наихудший результаты. Из-за двух неудачных прыжков (49 см и 51 см) среднее арифметическое оказалось намного меньше, чем большая часть результатов. Медиана 225 см находится в наиболее многочисленной группе ре-

зультатов, поэтому она и показывает типичный результат.

*Ответ:* а) 225 см.

Содержание критерия	Баллы
Найдена медиана и имеется разумное рассуждение в пункте «б»	2
Найдена медиана, рассуждение в пункте «б» неверно, отсутствует или не имеет отношения к вопросу	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>2</b>

6. Введем обозначения событий:  $A$  — «Андрей бросал два раза» и  $B$  — «Андрей выиграл». Нужно найти условную вероятность  $P(A|B)$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Событие  $B$  «Андрей выиграл» является объединением двух событий:  $B_1$  — «Андрей выбросил орла в первый раз» и  $B_2$  — «Андрей в первый раз выбросил решку, а во второй раз — орла». Эти события несовместны, а их вероятности равны:

$$P(B_1) = 0,5 \text{ и } P(B_2) = 0,25,$$

поэтому  $P(B) = 0,75$ . Событие  $A \cap B$  состоит в том, что Андрей в первый раз выбросил решку, а во второй — орла, поэтому совпадает с событием  $B_2$ :

$$P(A \cap B) = P(B_2) = 0,25.$$

Подставим найденные значения:

$$P(A|B) = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{3}$ .

*Примечание.* Задачу можно решить с помощью графа или перечисления благоприятствующих равновозможных исходов эксперимента.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>1</b>

7. а) Сумма вероятностей в распределении равна 1. Следовательно,

$$p = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2.$$

б) Математическое ожидание  $E[X]$  можно найти по формуле, зная распределение:

$$E[X] = -1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 = 0,4.$$

в) По условию величины  $X$  и  $Y$  независимы. Поэтому значение одной не влияет на вероятность появления любого значения другой величины, а вероятность каждой пары  $X = a$ ,  $Y = b$  равна произведению соответствующих вероятностей. Получаем:

$$Z \sim \begin{pmatrix} -1+1 & -1+2 & 0+1 & 0+2 & 3+1 & 3+2 \\ 0,5 \cdot 0,4 & 0,5 \cdot 0,6 & 0,2 \cdot 0,4 & 0,2 \cdot 0,6 & 0,3 \cdot 0,4 & 0,3 \cdot 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,08 & 0,12 & 0,12 & 0,18 \end{pmatrix}.$$

Значение 1 в получившейся таблице записано дважды. Запишем его один раз, сложив соответствующие вероятности:

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0,2 & 0,38 & 0,12 & 0,12 & 0,18 \end{pmatrix}.$$

Для самопроверки полезно убедиться, что сумма всех найденных вероятностей равна 1.

*Ответ:* а)  $p = 0,2$ ; б)  $E[X] = 0,4$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0,2 & 0,38 & 0,12 & 0,12 & 0,18 \end{pmatrix}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы во всех трех пунктах «а»—«в»	3
Верно решены два из трех пунктов «а»—«в»	2
Верно решен только один из пунктов «а», «б» или «в»	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>3</b>

## ФОТО НА КОНКУРС

**Поздравляем победителя фотоконкурса «Лето – осень–2015»!**

Им стала Егорова Лариса Геннадьевна, учитель математики и физики Еметкинской СОШ Козловского района Чувашской Республики за фото «Навеки с математикой» (№ 7–8).

