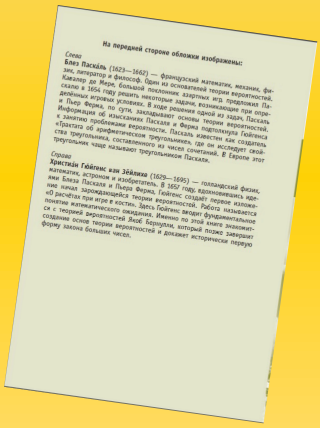
И. ВЫСОЦКИЙ,
г. Москва

НОВЫЕ КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА МЦНМО



В издательстве МЦНМО в 2017 году выходят четыре книжки серии «Теория вероятностей и статистика в школе»:

- «Дидактические материалы по теории вероятностей. 8–9 классы»;
- «Кружок по теории вероятностей. 8–11 классы»;
- «Задачи заочных интернет-олимпиад. 6–11 классы»;
- «Итоговые контрольные работы и тренировочные задания для 10 класса».

Пособия подготовлены в лаборатории теории вероятностей и статистики МЦНМО. Автор — Иван Ростиславович Высоцкий. Книжка с задачами олимпиад написана в соавторстве с Ященко Иваном Валериевичем.

В этом и ближайших номерах мы дадим краткое описание каждого из пособий и примеры содержащихся в них материалов. Начнем с дидактических материалов.

Дидактические материалы по теории вероятностей

Спорят три математика.

Алгебраист. Вождь первобытных охотников считал, сколько людей нужно для загона мамонта. Первой появилась арифметика.

Геометр (*возражает*). Но перед этим он рисовал на песке схему охоты. Так что сначала возникла геометрия.

Вероятностник. А накануне жена спросила вождя: «Мамонта принесешь?» Тот поскреб в затылке и ответил: «Возможно». Так что сперва появилась теория вероятностей.

Отсутствие сложившейся теории преподавания школьной вероятности делает это пособие крайне актуальным для учителя, который понимает, что теория вероятностей — наиболее важный с практической точки зрения раздел школьной математики.

Обобщив накопившийся опыт, нужно превратить изучение и преподавание теории вероятностей в школе в систему простых учебных элементов, методов и ясных итоговых требований, как это давно сделано в алгебре и — в меньшей степени — в геометрии.

Пособие «Дидактические материалы по теории вероятностей. 8–9 классы», по сути говоря, первая попытка это сделать. Оно предназначено в основном для использования на уроках математики и для подготовки к ним. Автор учитывал, что опыта преподавания у учителей мало. Поэтому каждый тип задач снабжен примером возможного решения или ясными указаниями.

Пособие содержит избыточно много задач, позволяющих выстроить классную и домашнюю работу, организовать самостоятельные и контрольные работы, подготовить школьников к итоговым работам по теории вероятностей, к ОГЭ и ЕГЭ.

Вероятность — это не комбинаторика. Сложившаяся институтская практика, когда студентов накачивают комбинаторными фактами, а затем предлагают решить задачку про вероятность, работает плохо и в школе категорически неприемлема. Если учитель начинает решение задачи с рассуждений о том, какой в задаче выбор — с возвращением или без, с упорядочением или без, можно уверенно утверждать, что все пошло насмарку: у школьников образуется твердое убеждение, что все это немыслимо, непостижимо и никому не нужно.

При составлении пособия использовался *ясный некомбинаторный подход*: для решения задач не требуются предварительные сведения о факториалах, числах сочетаний и т.п. Комбинаторные коэффициенты, нужные при решении некоторых задач, берутся из приложенной таблицы. Лишь в некоторых задачах повышенной трудности требуется использовать формулу числа сочетаний.

Числа в задачах по возможности подобраны так, чтобы избежать громоздких вычислений, однако подразумевается, что учащиеся *могут пользоваться калькулятором*. Он необходим при решении задач § 6 и § 7, где требуется возводить дроби в степени даже после упрощений.

В пособии три раздела, всего 11 параграфов. Темы параграфов соответствуют действующему образовательному стандарту и примерным федеральным программам основной школы (34 или 68 часов за два года). Отсутствует лишь параграф, посвященный геометрической вероятности.

Параграфы, содержащие задачи современных банков ОГЭ и ЕГЭ, помечены буквой А. В каждом параграфе есть несколько задач повышенной трудности.

В каждой теме предложены задания для домашних работ, карточки, с помощью которых учитель может организовать индивидуальную работу с мотивированными учащимися, и тексты самостоятельных работ, а в конце каждого раздела — контрольная работа. Использованы обозначения: С — самостоятельная работа, К — контрольная работа, И — карточка для индивидуальной работы, «*» — задача повышенной сложности.

Домашние и классные задачи не отличаются по уровню сложности. Каждая карточка для индивидуальной работы содержит две задачи: первая — среднего уровня сложности, вторая — сложная.

Самостоятельные работы даны в двух равноценных вариантах и рассчитаны каждая на 20 минут. Контрольные работы также в двух вариантах, рассчитаны на 45 минут и содержат по шесть задач в порядке возрастания сложности.

В конце пособия помещен небольшой справочник, разъясняющий встречающиеся термины и использовавшиеся методы. Справочник невелик, но содержит примеры применения основных методов (их немного), что позволяет использовать книгу как самостоятельное учебное пособие даже в случае отсутствия регулярного учебника.

Автор уверен (или по крайней мере надеется), что, используя это пособие, учитель и школьник убедятся в том, что теория вероятностей вовсе не запутанная наука, а задачи и способы их решения довольно просто систематизируются.

Перечень разделов и тематических параграфов с кратким описанием

Раздел I. Случайные события

§ 1. Классические случайные эксперименты с монетами и игральными костями (А)

Опыты с равновозможными элементарными событиями в жизни встречаются крайне редко. Чаще всего таким удобным свойством обладают искусственные опыты — лотереи, жребии и т.п. Проще говоря — игры. Теория вероятностей зародилась как подсчет шансов в играх, но давно переросла их и далеко вышла за рамки игровых экспериментов. Однако классические вероятностные модели — монета и игральные кости, ящики с шарами — остаются важным учебным элементом и частью научной культуры. Во-первых, потому что в этих экспериментах заранее известны вероятности элементарных исходов. Но главное — потому что эти опыты, несмотря на их простоту, позволяют моделировать гораздо более важные и сложные вероятностные ситуации.

С дидактической точки зрения эксперименты с костями и монетами позволяют выработать первичные навыки вычисления вероятностей и подготовиться к решению задач государственных экзаменов.

Во всех этих опытах множество элементарных событий эксперимента определяется естественной его организацией: если бросают одну монету, то исходов два — орел и решка, если монету бросают дважды, то элементарных событий четыре. При бросании одной кости — их шесть, а при двукратном бросании — событий $6 \cdot 6 = 36$.

При разборе задач предлагается универсальная система краткой записи решения, которая впоследствии распространяется на более сложные задачи при должных упрощениях или дополнениях.

§ 2. Опыты с равновозможными элементарными исходами (А)

Уже отмечалось, что опыты с равновозможными элементарными событиями, как правило, искусственно организованы для уравнивания шансов в разного рода играх, соревнованиях или при разделе каких-либо благ. Любые жизненные вероятностные задачи, где исходы неравновозможны, требуют математического аппарата, которого у школьников нет. С другой стороны, *ограничиваться игровыми опытами нельзя*: это создает ложное впечатление, что теория вероятностей — это наука про игры.

Понимание этой дилеммы приводит к необходимости искать в жизни сюжеты, где равновозможные исходы оправданны. Поэтому возникают относительно естественные задачи, где главную роль играет случайный выбор (например, жребий). Задачи, собранные в этой части сборника, в основном задачи открытых аттестационных банков, хотя добавлены некоторые сюжеты, которые не встречаются в ОГЭ или ЕГЭ.

При решении каждой задачи этого параграфа нужно определить, что представляет собой элементарный исход эксперимента, сколько этих исходов и какие и сколько из них благоприятствуют нужному событию.

§ 3. Решение задач с помощью координатной прямой (А)

Привычная школьнику координатная прямая служит хорошей и естественной моделью для некоторых вероятностных задач. Эти задачи связаны со случайными величинами, о которых еще нет речи. Зная, как события связаны между собой, и зная вероятность некоторых из них, с помощью числовой прямой можно найти вероятности других событий. Другой тип задач — сравнение вероятностей событий. Если первое событие является подмножеством второго, то вероятность второго события не меньше вероятности первого. Здесь есть аналогия с решением неравенств на числовой прямой.

§ 4. Операции над событиями. Диаграммы Эйлера. Независимые события

Координатная прямая, служившая основным инструментом в задачах § 3, удобна, пока события можно описать числовыми величинами. Для событий произвольной природы удобно использовать другое графическое представление — диаграммы или круги Эйлера. Каждое событие изображается фигурой, например, кругом внутри прямоугольника. Пересечение событий — пересечение фигур; объединение событий — объединение фигур. Площадь фигуры схематично изображает вероятность соответствующего события.

Весь прямоугольник соответствует событию с единичной вероятностью, то есть прямоугольник — это весь эксперимент.

В этом параграфе появляются задачи, где используется *независимость* событий и сам этот термин. Независимость событий A и B означает, что вероятность их одновременного наступления в эксперименте равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Если независимости событий нет, то вероятность одновременного их наступления найти сложнее, возможно, в условии потребуются дополнительные сведения.

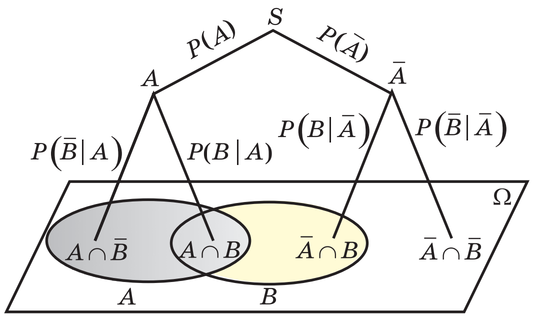
Другая полезная формула — формула сложения вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Она может использоваться в решении многих задач этого параграфа. Но диаграммы Эйлера позволяют решать задачи наглядно, практически не пользуясь формулами.

§ 5. Дерево случайного эксперимента

Дерево эксперимента или дерево вероятностей — удобный и универсальный инструмент решения вероятностных задач. Решая задачи, мы видим, что практически все, что можно решить с помощью диаграмм Эйлера, можно решить с помощью дерева или наоборот. В некоторых случая удобнее диаграмма, в других — дерево. Проиллюстрируем это утверждение рисунком, где видно, как четырем областям на диаграмме Эйлера соответствуют четыре цепочки в простом дереве, также построенном для событий A и B.



Дерево позволяет рассматривать составной эксперимент как бы по частям. Иногда удобно мысленно расположить случайные события во времени, хотя нужно помнить, что эта очередность условная. Событие A можно рассматривать при условии, что событие B произошло. Точно так же можно считать, что случилось событие A, и тогда ставить вопрос о вероятности события B. Эти *условные вероятности* удобно надписывать около соответствующих ребер дерева. Это наглядно, и этому легко научиться. Даже при небольшом навыке деревья становятся излюбленным способом решения многих задач.

Раздел II. Эксперименты с последовательными испытаниями

§ 6. Испытания до первого успеха

Следуя традиции, называем *испытанием* простой эксперимент, в котором возможны два элементарных исхода: *успех* или *неудача*. Например, однократное бросание монеты — испытание.

Из отдельных испытаний строятся более сложные эксперименты. Например, можно проводить испытания до тех пор, пока не случится первый успех. В этот момент эксперимент заканчивается. Элементарными событиями в таком эксперименте являются последовательности неудач (Н) и успехов (У) такого вида:

У, НУ, ННУ, НННУ, ННННУ, ...

Количество элементарных исходов бесконечно, а их вероятности образуют геометрическую прогрессию

$$p,\ qp,\ q^2p,\ q^3p,\ q^4p,\ \ldots,$$

где буквами p и q обозначены вероятности успеха и неудачи соответственно.

Такая модель часто встречается в жизни. Решая задачи этот параграфа, можно пользоваться деревьями. Можно обойтись даже без упоминания геометрической прогрессии. Напротив, при изучении прогрессий в 9-м классе вероятностный опыт с испытаниями до первого успеха можно и нужно использовать для предъявления важных и осмысленных примеров геометрической прогрессии в жизни.

§ 7. Серии испытаний Бернулли

В этом параграфе собраны задачи, для решения которых используется *формула Бернулли*

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

которая дает вероятность ровно k успехов в серии из n одинаковых независимых испытаний. Можно, например, ставить вопрос о вероятности события «успехов случилось 8 из 10» или — что сложнее — события «успехов не менее 6 из 10» и т.п.

Вероятностная схема Бернулли используется везде, где возникают выборочные обследования, — в социологии (опрос населения или прогноз результатов выборов), на производстве (оценка доли бракованной продукции), в маркетинге (анализ спроса), медицине (анализ эффективности лечения или побочных действий лекарств), психологии и т.п. Список можно продолжать практически бесконечно.

В формуле Бернулли присутствует число сочетаний C_n^k, которое само по себе не является объектом теории вероятностей. Практика показывает, что это сложный для школьников объект, к которому нужно привыкнуть. Представляется разумным до тех пор, пока речь идет о небольших n, вместо формулы пользоваться таблицей — *треугольником Паскаля*.

§ 8. Случайный выбор из конечной совокупности

В этом параграфе собраны задачи, где происходит случайный выбор из некоторого конечного множества предметов, причем в ходе эксперимента множество уменьшается.

Общая схема такова: имеются объекты, часть из них каким-то образом помечены (красные шары среди всех шаров, мальчики среди всех школьников, белые вороны среди всех ворон и т.п.). Случайным образом выбирают какую-то часть множества, и возникает вопрос о вероятности того, что в выборку попало определенное количество помеченных объектов.

Если выбираются два или три объекта, то специальные методы не нужны — можно обойтись несложным деревом. Все гораздо сложнее, если выбранных объектов много.

Для задач этого параграфа предлагается удобная универсальная краткая запись решения в виде таблицы.

Раздел III. Случайные величины

§ 9. Дискретная случайная величина. Распределение вероятностей

События и их вероятности не исчерпывают круг важных вопросов даже на уровне основной школы. Поскольку наша основная цель — развитие статистического мышления, осознанного отношения к массовым явлениям, то одной из задач обучения следует полагать знакомство с *законом больших чисел*, который утверждает статистическую устойчивость во многих случайных экспериментах. В частности, он объясняет, почему подсчет вероятностей имеет смысл при прогнозировании и почему вероятность можно измерять с помощью выборочных исследований.

Более глубокое знакомство со случайными величинами, вероятно, следует отнести к старшей школе, а в 9-м классе следует заняться лишь подготовительной работой: первым знакомством с распределениями случайных величин. Три параграфа этого раздела содержат достаточное количество задач для развития навыков, которые впоследствии могут лечь в основу более глубокого знания.

Важно сформировать представление о числовой случайной величине как о величине, которая в ходе случайного опыта под воздействием случайных обстоятельств может принимать разные значения.

В основу методики положен индуктивный подход: большая часть случайных величин, использующихся в задачах, в том или ином виде уже встречалась в предыдущих параграфах.

Большое внимание уделяется *бинарной случайной величине*, принимающей всего два значения, 0 и 1, и связанной с некоторым событием A:

$$I=\begin{cases}1, \text{если событие } A \text{ наступило},\\ 0, \text{если событие } A \text{ не наступило } \left(\text{наступило } \overline{A}\right).\end{cases}$$

Такие величины позволяют легко решать задачи, которые на первый взгляд кажутся сложными.

§ 10. Математическое ожидание случайной величины

Математическое ожидание случайной величины (среднее значение этой величины) — теоретический аналог среднего арифметического наблюдений, поэтому важно подчеркивать родственность этих понятий. На уроках рекомендуется иногда вместо словосочетания «математическое ожидание» употреблять менее формальные «среднее значение» или просто «среднее».

§ 11. Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины

Одно только математическое ожидание недостаточно характеризует случайную величину, поскольку показывает, где центр, но не показывает, насколько значения сосредоточены вблизи этого центра. Для измерения рассеивания применяются разные меры. Наиболее употребительными являются *дисперсия* и *стандартное отклонение*.

В большинстве задач стандартное отклонение следует рассматривать как среднее, типичное отклонение. Важно, чтобы учащийся понимал, что стандартное отклонение характеризует среднее отклонение значений случайной величины от ее математического ожидания.

Изучение математического ожидания и дисперсии — важный и необходимый шаг к пониманию природы статистической устойчивости и действия закона больших чисел.

Примеры задач с решениями

Раздел I. Случайные события

1. Симметричную монету бросили два раза. Найдите вероятность события A «в первый раз выпал орел».

Пример решения. Всего равновозможных элементарных исходов четыре: $N = 4$. Событию A благоприятствуют два исхода: ОО и ОР. $N(A) = 2$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{2}{4}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

2. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события A «сумма выпавших очков равна 8».

Пример решения. Отметим событие A в таблице эксперимента. Всего равновозможных исходов $N = 36$. Событию A благоприятствуют 5 исходов, $N(A) = 5$.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}.$$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						×
3					×	
4				×		
5			×			
6		×				

3. В соревнованиях по толканию ядра участвуют шесть спортсменов из Греции, четыре спортсмена из Болгарии, три спортсмена из Румынии и семь — из Венгрии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Венгрии.

Пример решения. Элементарным исходом в эксперименте является спортсмен, который выступает последним. Всего элементарных исходов

$$N = 6 + 4 + 3 + 7 = 20,$$

из них событию A «последним выступает спортсмен из Венгрии» благоприятствуют $N(A) = 7$. Все элементарные исходы равновозможны, поэтому

$$\mathrm{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{7}{20}=0{,}35.$$

Ответ: 0,35.

4. Какова вероятность того, что последние две цифры телефонного номера случайного абонента совпадают?

Пример решения. Элементарный исход в этом эксперименте — пара цифр. Всего элементарных исходов $N = 100$: от (00) до (99).

Событию A «цифры совпали» благоприятствуют $N(A) = 10$ элементарных исходов: (00), (11), (22), ..., (99). Все исходы равновозможны. Поэтому

$$\mathrm{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{10}{100}=0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

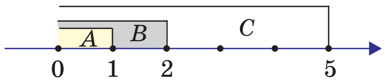
5. Аня ждет автобуса на остановке. Какое из событий более вероятно:

A. «Автобус придет меньше чем через минуту».

B. «Автобус придет меньше чем через две минуты».

C. «Автобус придет меньше чем через пять минут».

Пример решения. Изобразим события на числовой прямой.



Событие C включает в себя события A и B. Поэтому вероятность события C самая высокая из всех (по крайней мере, не меньше двух других).

Ответ: C.

6. На хлебозаводе производится контрольное взвешивание испеченной буханки хлеба. Среди предложенных событий выберите событие с наименьшей вероятностью.

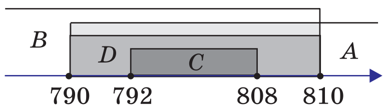
A. «Масса больше 790 г».

B. «Масса меньше 810 г».

C. «Масса от 792 до 808 г».

D. «Масса от 790 до 810 г».

Пример решения. Изобразим события на числовой прямой.



На рисунке видно, что событие C является подмножеством всех других событий, то есть вероятность наступления события C не больше, чем всех остальных событий.

Ответ: C.

7. Даны два события, A и B, и известны некоторые вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}1$. Во всех четырех фигурах на диаграмме Эйлера расставьте вероятности соответствующих событий.

Пример решения. Найдем вероятность «левой лунки», то есть события $A \cap \bar{B}$:

$$\mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3.$$

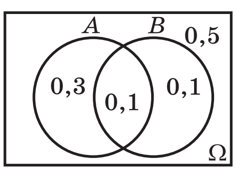
Так же находим, что вероятность «правой лунки» равна

$$\mathrm{P}(\bar{A} \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1.$$

На долю события $\bar{A} \cap \bar{B}$ («внешней части») остается $1 - 0{,}1 - 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}5$.

Можно рассуждать другими способами.

Ответ:



8. Симметричную монету бросают три раза. Рассмотрите события «в первый раз выпал орел» и «решка выпала только один раз».

а) Являются ли эти события независимыми?

б) Найдите вероятность объединения этих событий.

Пример решения. Событие A «в первый раз орел» и событие B «решка выпала только один раз» запишем перечислением элементарных исходов:

$A = \{\text{ООО; ООР; ОРО; ОРР}\}$,

$B = \{\text{ООР; ОРО; РОО}\}$.

Их пересечение

$$A \cap B = \{\text{ООР; ОРО}\}$$

состоит из двух исходов. Получаем:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2},\ \ \mathrm{P}(B) = \frac{3}{8},\ \ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Равенство

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

не выполняется. Следовательно, события A и B не являются независимыми. Объединение событий имеет вид

$$A \cup B = \{\text{ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО}\}.$$

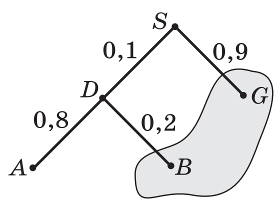
Вероятность события равна $\frac{5}{8}$. Кроме того, можно воспользоваться формулой сложения:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

Ответ: а) нет; б) 0,625.

9. На фабрике керамической посуды 10% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что произведенная тарелка попадет в продажу.

Пример решения. Дефект будем обозначать буквой D, хорошую тарелку — буквой G. Если дефект обнаружили при контроле качества, такое событие назовем A, если же дефектную тарелку пропустили в продажу, обозначим такое событие B. Получаем дерево:



Событию «тарелка попала в продажу» (закрашено на рисунке) благоприятствуют цепочки SG и SDB. Вероятность этого события равна

$$\mathrm{P}(SG) + \mathrm{P}(SDB) = 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}92.$$

Замечание. Задачу можно было решить переходом к противоположному событию. Достаточно найти вероятность события A «тарелка забракована»:

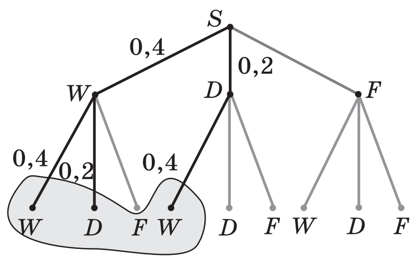
$$\mathrm{P}(SDA) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}08,$$

и вычесть ее из единицы.

Ответ: 0,92.

10. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Пример решения. Ясно, что команде нужны либо две победы, либо победа и ничья. Поэтому можно строить не все дерево, а только его часть. Лишнюю часть мы все же изобразим, но неярко. Выигрыш обозначим W, поражение F, а ничью D. Вероятность ничьей равна 0,2.



Событию A «хотя бы четыре очка» благоприятствуют цепочки SWW, SWD и SDW. Поэтому

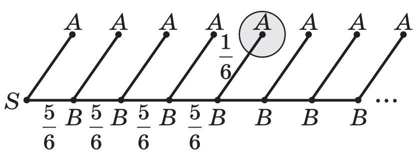
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(SWW) + \mathrm{P}(SWD) + \mathrm{P}(SDW) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}32.$$

Ответ: 0,32.

Раздел II. Эксперименты с последовательными испытаниями

11. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найдите вероятность того, что будет сделано 5 бросков.

Пример решения. Построим дерево эксперимента. Вероятность выпадения шестерки при каждом броске равна $\frac{1}{6}$. Это событие назовем A. Любое другое число очков имеет вероятность $\frac{5}{6}$. Обозначим такое событие B.



Событие «сделано пять бросков» изображено цепочкой $SBBBBA$. Вероятность этого

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5^4}{6^5} = \frac{625}{7776} \approx 0{,}08.$$

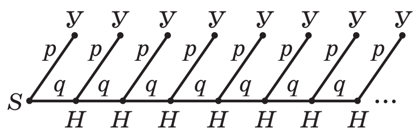
Ответ: $\frac{625}{7776}$, то есть приближенно 0,08.

12. Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи равна $q = 1 - p$. Найдите вероятность события:

а) «успех случится при третьем испытании»;

б) «успех случится позже третьего испытания»;

Пример решения. С помощью дерева эксперимента



находим, что событие A «успех при третьем испытании» представлено цепочкой $SHHУ$ и имеет вероятность

$$\mathrm{P}(A) = qqp = q^2p.$$

Событию B «успех случится позже третьего испытания», то есть на четвертой, пятой попытке или позже, благоприятствуют цепочки

$$SHHHУ,\ SHHHHУ,\ SHHHHHУ \text{ и т.д.}$$

Вместо того чтобы складывать бесконечное количество вероятностей всех этих цепочек, заметим, что все эти цепочки имеют общее начало $SHHH$. Вероятность этой цепочки найти легко:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(SHHH) = q^3.$$

Ответ: а) q^2p; б) q^3.

13. Симметричную монету бросают три раза. Запишите все элементарные исходы в этом эксперименте. Около каждого подпишите число орлов и найдите вероятность события «выпало k орлов» для всех возможных k. Заполните таблицу.

3 монеты

Число выпавших орлов (k)	0	1	2	3
Вероятность				

Пример решения

ООО	3	РОО	2
ООР	2	РОР	1
ОРО	2	РРО	1
ОРР	1	РРР	0

Обратите внимание: элементарные исходы удобнее перечислять, пользуясь какой-нибудь системой, иначе легко что-либо потерять. В данном случае мы записали в левом столбце все исходы с первой буквой О, а в правом — такие же, но с буквой Р в начале.

Событие «выпало k орлов» для простоты обозначим A_k. Всего равновозможных исходов восемь: $N = 8$. Исход РРР без орлов единственный: $N(A_0) = 1$, поэтому

$$\mathrm{P}(A_0)=\frac{1}{8}.$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$\mathrm{P}(A_1)=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(A_2)=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(A_3)=\frac{1}{8}.$$

Ответ:

3 монеты

Число выпавших орлов (k)	0	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

14*. Система ПВО должна поражать летящую цель с вероятностью не менее 0,95. Система с интервалом в несколько секунд выпускает по цели несколько ракет. Известно, что каждая отдельная ракета поражает цель с вероятностью 0,6.

а) Достаточно ли трех ракет, чтобы цель была поражена с вероятностью не менее 0,95?

б) Достаточно ли четырех ракет?

Пример решения. Требуется, чтобы в серии из трех или четырех испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}6$ успех случился хотя бы раз. Будем искать вероятность противоположного события — события «цель не поражена ни разу».

Если ракет три, то эта вероятность равна

$$\mathrm{P}(A_0) = 0{,}4^3 = 0{,}064.$$

Тогда вероятность поражения цели равна 0,936 — недостаточно.

Если ракет четыре, то

$$\mathrm{P}(A_0) = 0{,}4^4 = 0{,}0256.$$

Вероятность поражения равна 0,9744.

Ответ: а) нет; б) да.

15. В коробке 9 фломастеров, из них 4 красных, остальные — синие. Не глядя, из коробки забирают 5 фломастеров. Найдите вероятность того, что среди взятых фломастеров ровно два красных.

Пример решения. Найдем вероятность события A_2 «ровно два красных». Данные и вычисления занесем в таблицу.

	Фломастеры		
	красные	синие	всего
В коробке	4	5	9
Выбрано (A_2)	2	3	5
Число способов	$C_4^2=6$	$C_5^3=10$	$C_9^5=126$

Вероятность события A_2 равна

$$\mathrm{P}(A_2)=\frac{C_4^2\cdot C_5^3}{C_9^5}=\frac{6\cdot 10}{126}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}.$$

Ответ: $\frac{10}{21}$.

Раздел III. Случайные величины

16. Бросают одну игральную кость. Случайная величина I устроена таким образом: если на кости выпала шестерка, то $I = 1$, в противном случае $I = 0$. Составьте распределение случайной величины I.

Пример решения. Вероятность выпадения шестерки равна $\frac{1}{6}$, вероятность выпадения не шестерки равна $\frac{5}{6}$. Получаем распределение

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

17. Дана случайная величина

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 7 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Составьте распределение случайной величины $Y = X^2$.

Пример решения. Значения меняются по указанной формуле, а вероятности остаются прежними. Получаем:

$$X \sim \begin{pmatrix} \underline{9} & 1 & \underline{9} & 49 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Значение 9 встречается дважды (оно подчеркнуто). Его нужно записать один раз, сложив соответствующие вероятности. Это действие напоминает приведение подобных членов:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & 49 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4}+\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 49 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

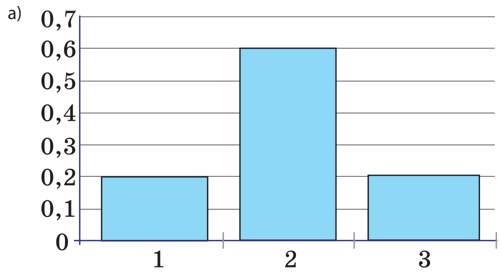
Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 49 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

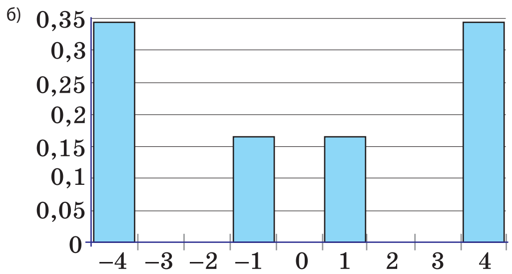
18. Найдите математическое ожидание случайной величины, заданной распределением:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$;

б) $Y \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Пример решения. Ничто не мешает вычислить эти математические ожидания по определению. Заметим, однако, что распределения симметричны, то есть значения образуют симметричное множество, а вероятности симметричных значений равны. Диаграмма симметричного распределения — симметричная фигура. На рисунке показаны диаграммы обоих распределений из условия.





Математическое ожидание симметричных распределений находится в точке, через которую проходит ось симметрии. В пункте «а» $\mathrm{E}X = 2$, а в пункте «б»

$$\mathrm{E}Y = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Ответ: а) 2; б) 0.

19. Найдите математическое ожидание случайной величины S «число успехов» в серии из 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании.

Пример решения. Для каждого из 10 испытаний рассмотрим случайную величину

$$I_k = \begin{cases} 1, \text{ если в } k\text{-м испытании наступил успех,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Распределение каждой из десяти таких величин:

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

поэтому $\mathrm{E}I_k = p$. Общее число успехов равно сумме всех I_k:

$$S = I_1 + I_2 + \ldots + I_{10}.$$

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_{10} = 10p.$$

Ответ: $10p$.

20. Случайная величина X имеет дисперсию 2. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X - 3$; б) $2X$;
в) $3X - 4$; г) $-X$.

Пример решения. Воспользуемся свойствами дисперсии.

а) $\mathrm{D}(X - 3) = \mathrm{D}X = 2$;
б) $\mathrm{D}(2X) = 4\mathrm{D}X = 8$;
в) $\mathrm{D}(3X - 4) = \mathrm{D}(3X) = 9\mathrm{D}X = 18$;
г) $\mathrm{D}(-X) = (-1)^2\mathrm{D}X = \mathrm{D}X = 2$.

Ответ: а) 2; б) 8; в) 18; г) 2.

21[*]. Производится одно испытание Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$.

а) Найдите дисперсию случайной величины I «число наступивших успехов».

б) При каких значениях p дисперсия будет наибольшей? Приведите пример испытания с наибольшей возможной дисперсией.

Пример решения. Случайная величина I принимает два значения, 0 и 1, с вероятностями q и p:

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{E}I = p,$$
$$\mathrm{E}I^2 = \mathrm{E}I = p,$$

поэтому

$$\mathrm{D}I = \mathrm{E}I^2 - E^2 I = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

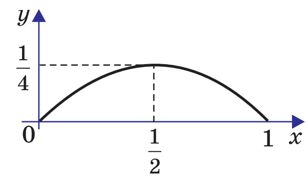
Рассмотрим дисперсию $\mathrm{D}I$ как функцию переменной p. Перейдем к привычным обозначениям:

$$y = \mathrm{D}I, \ x = p.$$

Тогда

$$y = x(1-x), \ y = x - x^2.$$

Графиком этой функции является парабола на отрезке $0 \le x \le 1$.



Эта функция принимает наибольшее значение

$$\mathrm{D}I = y = \frac{1}{4}$$

при

$$p = x = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, наибольшая дисперсия числа успехов будет в испытании, где вероятность успеха 0,5. Например, при бросании монеты.