

И. ВЫСОЦКИЙ,
И. ЯЩЕНКО,
Москва

МОСКОВСКИЕ ГОРОДСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

Окончание. Начало в № 2/2011.

8-й класс

Критерии оценивания

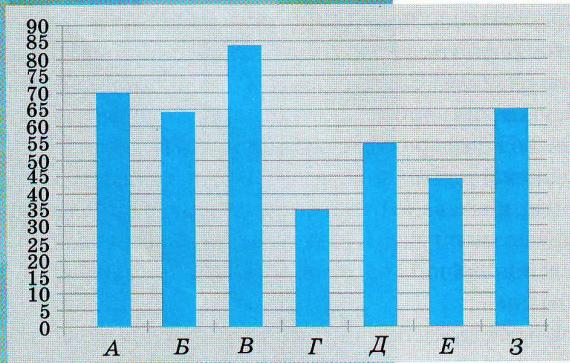
Отметка «отлично» ставится, если безошибочно выполнены любые пять заданий из шести; отметка «хорошо» ставится за выполнение четырех любых заданий, возможно, с одной вычислительной ошибкой при верном ходе рассуждений; отметка «удовлетворительно» — за выполнение трех любых заданий, возможно, с вычислительной ошибкой.

Вариант 1

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди покупателей: «Какой книжный магазин вам больше нравится?» Столбиковая диаграмма показывает рейтинги семи магазинов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:

- Какой магазин получил наибольшее число голосов по результатам опроса?
 - Сколько магазинов набрало более 60 баллов?
2. В таблице указано количество проданной минеральной воды (в тыс. бутылок) в весенние и летние месяцы за два года (по данным компании-производителя).
- Вычислите среднее арифметическое данных за все летние месяцы.
 - Вычислите среднее арифметическое данных за все весенние месяцы.
 - Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели отличаются друг от друга.



Месяц	2007	2008
Март	100	105
Апрель	104	111
Май	112	110
Июнь	119	126
Июль	120	125
Август	110	120

3. В городе планируется построить метрополитен, в котором три линии — южная, западная и кольцевая. Художнику поручено нарисовать схему будущего метрополитена, причем каждая линия должна иметь свой цвет. Художник использует три цвета: красный, синий и зеленый.

а) Сколько существует возможных вариантов распределения цветов?

б) Перечислите все варианты с помощью таблицы.

4. На чемпионате по художественной гимнастике выступает 18 гимнасток, среди них 3 гимнастки из России, 2 гимнастки из Китая. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что:

а) первой будет выступать гимнастка из России;

б) последней будет выступать гимнастка или из России, или из Китая.

5. Иван и Петр играют в кости. Каждый бросает кость два раза. Выигрывает тот, у кого выпавшая сумма очков больше. Если суммы очков равны, игра оканчивается вничью. Первым бросал кости Иван, и у него выпало 5 очков и 3 очка. Теперь бросает кости Петр.

а) В таблице элементарных событий укажите (штриховкой) элементарные события, благоприятствующие событию «Петр выигрывает».

б) Найдите вероятность события «Петр выигрывает».

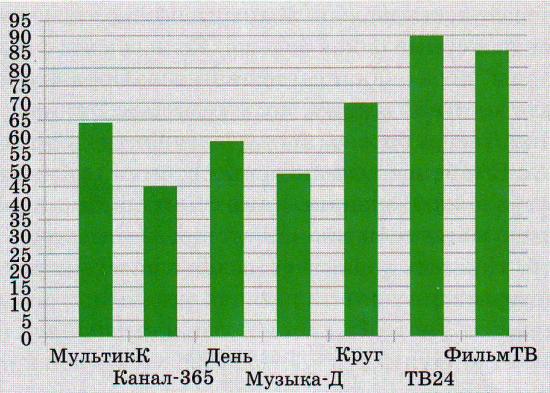
		Первая кость					
		1	2	3	4	5	6
Вторая кость	1						
	2						
3							
4							
5							
6							

6. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном семизначном телефонном номере последние четыре цифры — тройка и три двойки (в любом порядке).

Вариант 2

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди телезрителей: «Какой телеканал вам больше нравится?» На диаграмме показаны рейтинги семи телевизионных каналов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:



а) Какой канал получил наименьшее число голосов по результатам опроса?

б) Сколько каналов набрали менее 50 баллов?

2. В таблице указано количество проданных порций мороженого (в тыс. штук) в летние и осенние месяцы за два года (по данным компании-производителя).

Месяц	2007	2008
Июнь	815	843
Июль	817	915
Август	507	543
Сентябрь	411	500
Октябрь	225	450
Ноябрь	211	411

а) Вычислите среднее арифметическое данных за все летние месяцы.

б) Вычислите среднее арифметическое данных за все осенние месяцы.

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели отличаются друг от друга.

3. В городе три района — Заречный, Фабричный и Центральный. Художнику поручено нарисовать план города, причем каждый из районов должен быть выделен своим цветом. Художник решил использовать три цвета: розовый, голубой и желтый.

а) Сколько существует возможных вариантов распределения цветов?

б) Перечислите все варианты с помощью таблицы.

4. На чемпионате по прыжкам в воду выступает 20 спортсменов, среди них 5 прыгунов из России и 3 прыгун из США. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что:

а) первым будет прыгать спортсмен из США;

б) вторым будет прыгать спортсмен или из России, или из США.

5. Татьяна и Виктория играют в кости. Каждая бросает кость дважды. Выигрывает та, у кого выпавшая сумма очков больше. Если суммы очков равны, игра оканчивается вничью. Первой бросала кости Виктория, и у нее выпало 2 очка и 4 очка. Теперь бросает кости Татьяна.

а) В таблице элементарных событий укажите (штриховкой) элементарные события, благоприятствующие событию «Виктория выиграет».

б) Найдите вероятность события «Виктория выигрывает».

		Первая кость					
		1	2	3	4	5	6
Вторая кость	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

6. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном семизначном телефонном номере последние пять цифр — одна семерка и четыре восьмерки (в любом порядке).

Решения заданий варианта 1, требования к выполнению заданий и рекомендации по оцениванию

1. 1. *Возможное решение.* Самый высокий столбик соответствует магазину В.

Более 60 баллов набрали магазины А, Б, В и З. Всего 4 магазина.

Ответ: а) В; б) 4.

Это задание на чтение столбиковой диаграммы. От учащихся не требуется ни пояснений, ни развернутых ответов.

2. *Возможное решение.* Вычислим среднее за все летние месяцы:

$$\frac{119+126+120+125+110+120}{6}=120.$$

Теперь найдем среднее за все весенние месяцы:

$$\frac{100+105+104+111+112+110}{6}=107.$$

Ответ: а) 120; б) 107; в) вероятно, весной минеральную воду покупают меньше, потому что не так жарко, как летом, и пить хочется меньше.

При вычислении средних учащийся может воспользоваться свойствами средних. Например,

вычисляя средние за все летние месяцы, можно упростить вычисления, отняв от каждого из чисел 110, а потом прибавив это число к результату усреднения:

$$\frac{9+16+10+15+0+10}{6}+110=10+110=120.$$

Ответ на пункт «в» может быть непредсказуемым. Например — отличие небольшое, потому что хотя летом воды пьют больше, но все разъехались на дачи и покупают воду в других магазинах. Или: продажи весной и летом отличаются, потому что весной покупателям вода понравилась, и летом они стали покупать ее больше. Главный критерий — рассуждение содержит возможное, правдоподобное объяснение ситуации.

3. *Возможное решение.* Сначала решим пункт «б», перечислив варианты. Построим таблицу и заполним ее. Если южная линия имеет красный цвет, то западная и кольцевая имеют соответственно зеленый и синий или наоборот. Внесем эти два варианта в таблицу и найдем еще по два варианта в случаях, когда южная линия имеет синий или зеленый цвет. Получим таблицу.

Южная	K	K	C	C	Z	Z
Западная	3	C	K	3	K	C
Кольцевая	C	3	3	K	C	K

Тогда всего существует 6 раскрасок.

Ответ: а) 6.

Не следует выдавать школьникам шаблон таблицы заранее. Таблица должна быть сконструирована самостоятельно. При этом варианты могут располагаться как в строчках, так и в столбцах. Обозначения цветов могут быть сделаны буквами или цветными метками, линии метро также могут быть обозначены первыми буквами и т.п. Совершенно не играет роли, отделены графы таблицы друг от друга линиями или нет. Таблица должна быть аккуратной, полной и понятной. Других требований к ней нет. Пункт «а» многие школьники могут решить независимо от «б». Например, с помощью комбинаторного правила умножения: южной линии назначаем любой из трех цветов, для западной остается два цвета, а для кольцевой — один: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Особенное внимание следует обратить на тех учащихся, у кого в пунктах «а» и «б» получилось разное число раскрасок. Контроль над этой ошибкой не проводился, но в будущем планируется.

4. *Возможное решение.* а) При выборе первой гимнастки общее число элементарных событий

$N = 18$, число элементарных событий, благоприятствующих событию $A = \{\text{первая из России}\}$, $N(A) = 3$. Тогда

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

б) Пусть событие $B = \{\text{последняя из России или из Китая}\}$, $N = 18$, $N(B) = 3 + 2 = 5$, $P(B) = \frac{5}{18}$.

Учащийся может не обозначать события буквами. Запись решения может быть более или менее подробной, чем приведенная в примерном решении.

5. Возможное решение. Чтобы выиграть, Петр в сумме должен выбросить очков больше, чем $5 + 3 = 8$. Заштрихуем в таблице исходов опыта с бросанием двух игральных костей все исходы, благоприятствующие событию «Сумма очков больше 8». Общее число элементарных событий — 36, число благоприятствующих событий равно 10, значит, вероятность равна $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

		Первая кость					
		1	2	3	4	5	6
Вторая кость	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Учитель может разрешить учащимся пользоваться для штриховки заранее подготовленной таблицей либо потребовать перечертить таблицу в тетрадь. Не нужно требовать специальных письменных пояснений к штриховке.

6. Возможное решение. Общее число возможных комбинаций последних четырех цифр: $N = 10^4$. Указанному событию благоприятствуют исходы вида 3222, где цифры следуют в любом порядке. Позицию для тройки можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами. На остальные места нужно поставить двойки. Тогда искомая вероятность равна

$$\frac{C_4^1}{N} = \frac{4}{10^4} = \frac{1}{2500} = 0,0004.$$

Учащийся может не использовать комбинаторные соображения, а просто перечислить все благоприятствующие исходы: 3222, 2322, 2232 и 2223. Общее число комбинаций также можно найти непосредственно — чисел от 0 до 9999 ровно 10 000. Ответ может быть записан как обыкновенной, так и десятичной дробью.

Анализ значимых и типичных ошибок учащихся

Пояснение к анализу

Обычно анализ ошибок подразумевает указание процентной доли учащихся, допустивших ту или иную ошибку. Конечно, такие данные есть. Но понимая, что эти числа не являются абсолютно точными в силу случайной изменчивости разного рода, авторы не хотят, чтобы у читателя возникло искушение делать категоричные выводы из приблизительных данных. Поэтому таблицы с процентными данными не публикуются. Вместо этого ошибки поделены на несколько категорий по частоте их появления.

Очень редкая — ошибка встречается настолько редко, что данные о ее появлении статистически незначимы — они с высокой вероятностью могут объясняться погрешностью сбора или ввода данных.

Редкая — ошибка встречается в незначительном количестве.

Частая — таких ошибок много, но не настолько, чтобы можно было говорить об их массовом характере или системных просчетах в методике преподавания.

Массовая — ошибка, допущенная значительной частью учащихся, характерная для целых образовательных учреждений, свидетельствующая скорее об общих просчетах в методике или общих чертах учащихся, присущих им в силу психологово-возрастных свойств.

Если типы ошибок в задании не выделялись, анализ ошибок по такому заданию отсутствует.

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди покупателей: «Какой книжный магазин вам больше нравится?» Столбиковая диаграмма показывает рейтинги семи магазинов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:

а) Какой магазин получил наибольшее число голосов по результатам опроса?

б) Сколько магазинов набрало более 60 баллов?

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Вместо количества магазинов указаны их названия или номера столбиков	Редкая

Комментарии. Учащиеся, указавшие названия магазинов вместо количества, вероятно, сделали

это от излишней старательности. К сожалению, невнимание тоже нельзя списывать со счетов: в задаче четко спрашивалось о количестве.

2. В таблице указано количество проданной минеральной воды (в тыс. бутылок) в весенние и летние месяцы за два года (по данным компании-производителя).

Месяц	2007	2008
Март	100	105
Апрель	104	111
Май	112	110
Июнь	119	126
Июль	120	125
Август	110	120

а) Вычислите среднее арифметическое данных за все летние месяцы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Не выделены месяцы нужного времени года	Очень редкая
б	Взяты месяцы не за два года	Очень редкая
в	Ошибка в способе нахождения среднего арифметического (например, в качестве слагаемых взята полусумма данных)	Очень редкая

б) Вычислите среднее арифметическое данных за все весенние месяцы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Не выделены месяцы нужного времени года	Очень редкая
б	Взяты месяцы не за два года	Очень редкая
в	Ошибка в способе нахождения среднего арифметического (например, в качестве слагаемых взята полусумма данных)	Очень редкая

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели отличаются друг от друга.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Текст бессвязный, не имеет отношения к рассматриваемому явлению	Очень редкая
б	Рассуждение имеет отношение к делу, но неправдоподобное или ничего не объясняющее	Редкая

Комментарии. Не будем анализировать незначимые ошибки. Обратим внимание лишь на то, что количество восьмиклассников, показавших умение рассуждать, практически такое же, как и количество рассуждающих семиклассников: отличия в результатах решения задания 2(в) ничтожны.

3. В городе планируется построить метрополитен, в котором три линии — южная, западная и кольцевая. Художнику поручено нарисовать схему будущего метрополитена, причем каждая линия должна иметь свой цвет. Художник использует три цвета: красный, синий и зеленый.

а) Сколько существует возможных вариантов распределения цветов?

б) Перечислите все варианты с помощью таблицы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	В таблице один вариант встречается больше одного раза	Очень редкая
б	В таблице перечислены не все варианты	Редкая
в	Варианты частично или полностью перечислены, но таблица не оформлена	Очень редкая

4. На чемпионате по художественной гимнастике выступает 18 гимнасток, среди них 3 гимнастки из России, 2 гимнастки из Китая. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что:

а) первой будет выступать гимнастка из России;

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Учащийся неверно определяет общее число элементарных событий опыта	Редкая
б	Ответ дан в процентах	Очень редкая

б) последней будет выступать гимнастка или из России, или из Китая.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Ошибка в определении числа благоприятствующих элементарных событий	Частая
б	Ответ дан в процентах	Очень редкая

Комментарий. Количество учащихся, не сумевших решить простую вероятностную задачу, находится в ожидаемых пределах. Задание 4(б), будучи более сложным, естественным образом дало больше ошибок. При рассмотрении работ учащихся удивило большое число пытающихся применить какую-то комбинаторную технику, начавших вычислять число сочетаний и т.п. Это говорит о том, что многие ошибочно опознают ситуацию, не могут выделить стандартный вероятностный сюжет и потому действуют наобум, пытаясь воспользоваться каким-то изученным алгоритмом.

5. Иван и Петр играют в кости. Каждый бросает кость два раза. Выигрывает тот, у кого выпавшая сумма очков больше. Если суммы очков равны, игра оканчивается вничью. Первым бросал кости Иван, и у него выпало 5 очков и 3 очка. Теперь бросает кости Петр.

а) В таблице элементарных событий укажите (штриховкой) элементарные события, благоприятствующие событию «Петр выигрывает».

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Заштрихованы нужные клетки и лишние	Частая
б	Заштрихованы не все нужные клетки, но лишних нет	Редкая
в	Штриховка отсутствует или в корне неверна	Частая

б) Найдите вероятность события «Петр выигрывает».

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	При правильной штриховке неверно вычислено число благоприятствующих элементарных событий	Частая
б	При правильной штриховке решение отсутствует	Редкая

Комментарии. Задача стандартная, вероятно, основную трудность составило правильное понимание развернутого условия. Некоторую странность является собой большое число учащихся, неверно определивших число благоприятствующих событий при верной штриховке. Можно лишь предположить, что примерно один из десяти восьмиклассников плохо считает до десяти.

6. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном семизначном телефонном номере последние четыре цифры — тройка и три двойки (в любом порядке).

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Благоприятствующие события перечислены непосредственно (не является ошибкой)	Редкая
б	Общее число номеров определено неверно	Частая

Комментарий. Шестая задача, хотя и является самой трудной в работе, должна быть знакома учащимся — в учебниках содержится достаточное число заданий с похожим сюжетом. Задача могла быть решена с помощью комбинаторных методов, хотя допускала простой пересчет числа благоприятствующих элементарных исходов. Вероятно, основную трудность составило определение общего числа возможных номеров. Это проблема общематематической культуры: для того чтобы понять, что целых чисел от 0 до 9999 ровно десять тысяч, вовсе не требуется знать комбинаторные правила и формулы.